کنترل خطی

دانشگاه فنی حرفه ای

مدرس: باقری

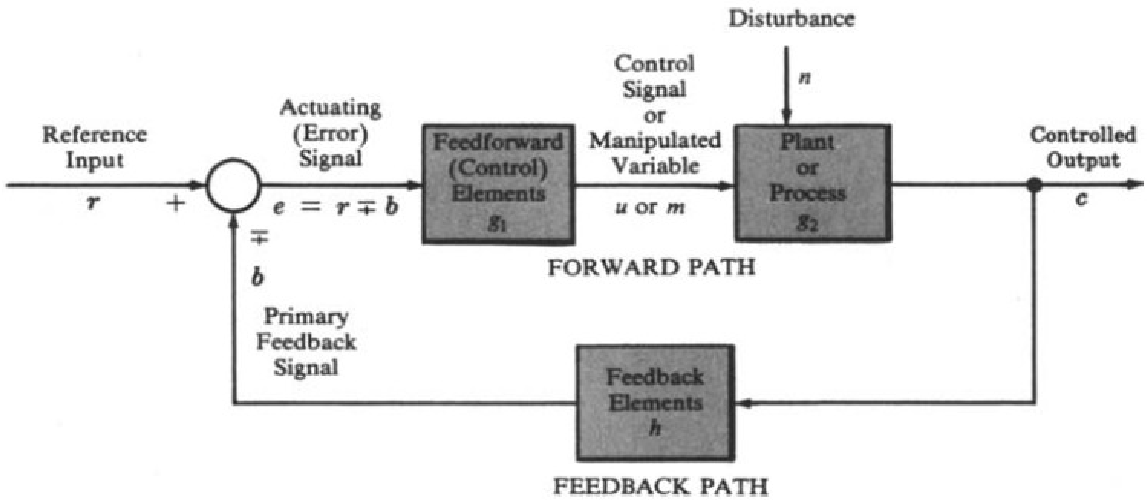
فصل اول

آشنائی با سیستمهای کنترل

تعاریف اولیه سیستمهای کنترل خطی:

1. **سیستم (*System*)** : مجموعه ای از اجزا هستند که با هم کار میکنند تا یک هدف خاص را دنبال کنند.
2. **فرایند (*process*)** : بخش خاصی از یک سیستم است که میخواهیم آن را تحت اختیار خود قرار دهیم.
3. **ورودی (*Input*)** : سیگنال یا فرمانی است که برای هدایت پروسه به آن اعمال می شود (یک سیستم می تواند یک یا چند ورودی داشته باشد). به ورودی مقدار مطلوب نیز گفته می شود.
4. **خروجی (*Output*)**: رفتاری از یک سیستم است که مورد توجه ماست و می خواهیم آن را در اختیار خود قرار دهیم (یک سیستم می تواند یک یا چند خروجی داشته باشد). به سیستمی که یک ورودی و یک خروجی دارد *SISO* و به سیستمی که چند ورودی یا خروجی داشته باشد *MIMO* گفته می شود.
5. **اغتشاش (*Noise*)** : عاملی است که بر خروجی پروسه تأثیر نا مطلوب می گذارد.
6. **فید بک (*Feed Back*)** : اندازه گیری خروجی و مقایسه آن با ورودی و تولید یک سیگنال خطا را فید بک می گوییم.
7. **کنترل (*Control*)** : بدین معنی است که بتوانیم بکمک تجهیزاتی که در اختیار داریم خروجی پروسه را به گونه ای در اختیار بگیریم تا متناسب با ورودی تغییر کند و عامل اغتشاش روی آن اثر کمی بگذارد.

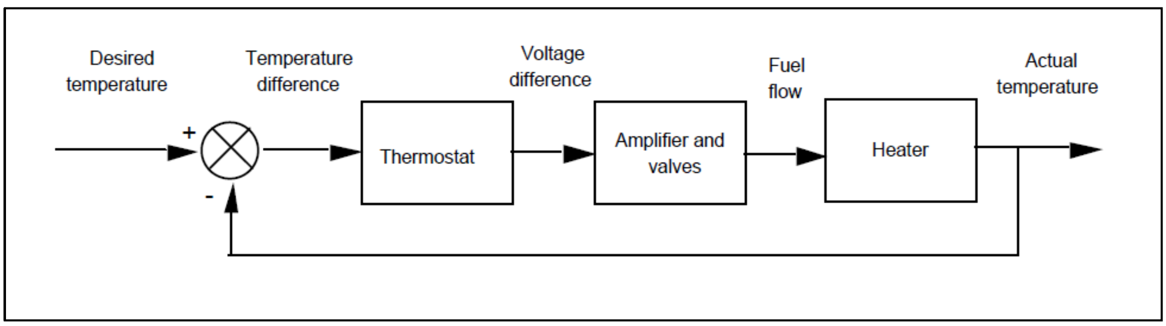
در شکل زیر می توان اجزاء یک سیستم کنترلی را مشاهده کرد:



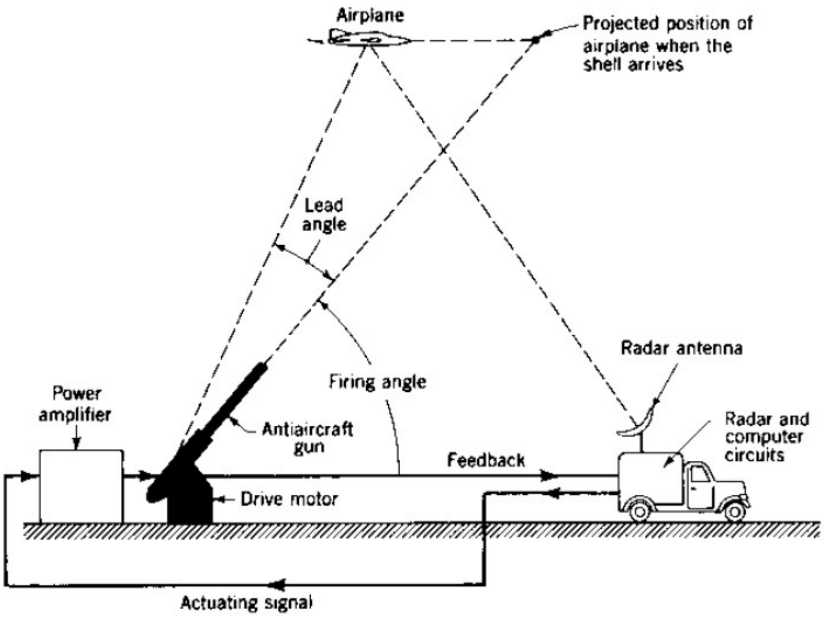
انواع سیستمهای کنترل:

کنترل فرایند : سیستمهایی که در آن ورودی دارای تغییرات نسبتا کند و در یک محدوده مشخص هستند و عامل اغتشاش تأثیر زیادی بر پروسه دارد سیستمهای کنترل فرایند نامیده میشوند. (مانند: پروسه کنترل دما، کنترل رطوبت، کنترل نور و ...)

شکل زیر بلوک دیاگرام یک سیستم کنترل دما را نمایش می دهد.

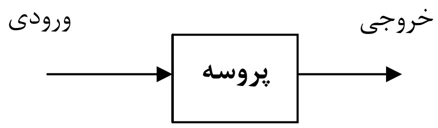


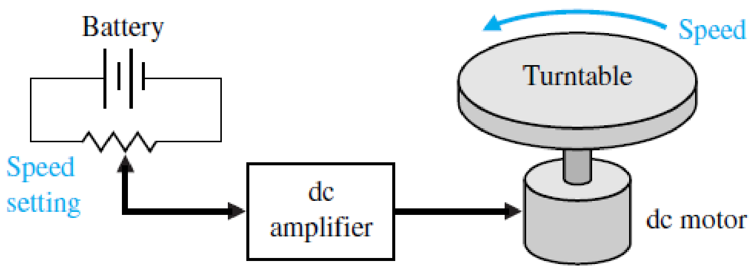
سرو مکانیزم : سیستمهایی هستند که در آنها خروجی مورد نظر، سرعت یا موقعیت یا گشتاور است در این گونه سیستمها تغییرات ورودی خیلی سریع و دامنه نا مشخصی دارد.



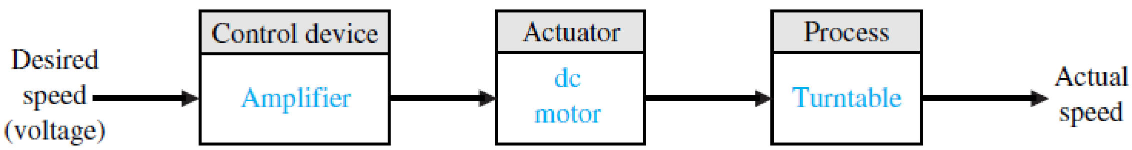
انواع سیستمهای کنترل از نظر استراتژی کنترل:

سیستمهای کنترل حلقه باز :



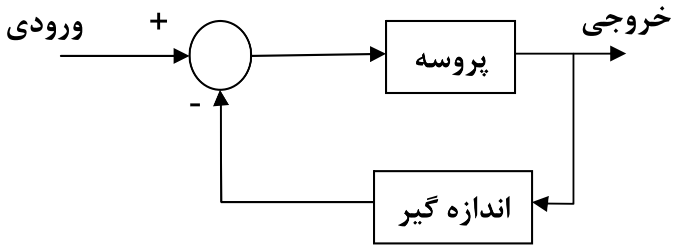


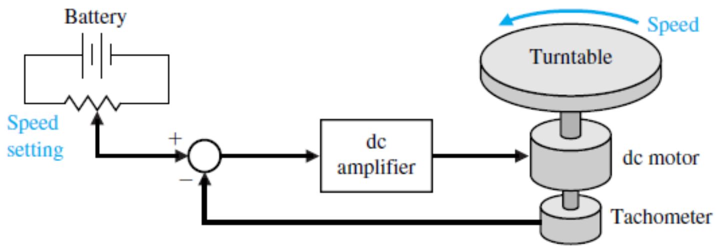
سیستم کنترل حلقه باز برای کنترل سرعت یک موتور *dc* به همراه بلوک دیاگرام آن

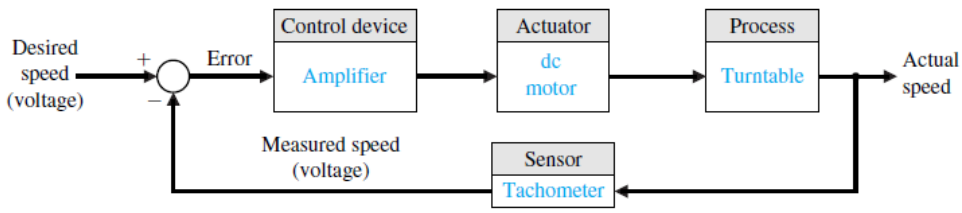


در سیستمهای کنترل حلقه باز هیچ فیدبکی از خروجی به ورودی داده نمیشود.

سیستمهای کنترل حلقه بسته :







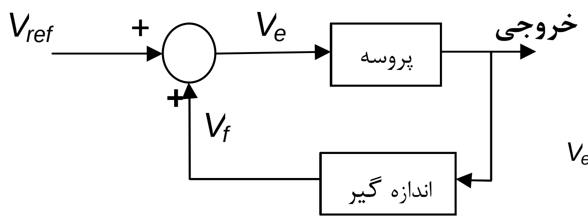
در شکل فوق سیستم کنترل سرعت موتور *dc* دیده می شود که برای تثبیت سرعت موتور در حالت بارداری و بی باری از از تاکومتر برای اندازه گیری سرعت و فیدبک آن به ورودی استفاده شده است.

تفاوت اصلی بین یک سیستم حلقه باز و بسته در وجود یا عدم وجود فیدبک است. در سیستم حلقه باز خروجی پروسه می تواند اندازه گیری شود ولی نتیجه کار با مقدار مطلوب مقایسه نمی شود تا رفتار سیستم اصلاح شود ولی در سیستم حلقه بسته این نظارت و کنترل دائماً در حال انجام است.

انواع فید بک :

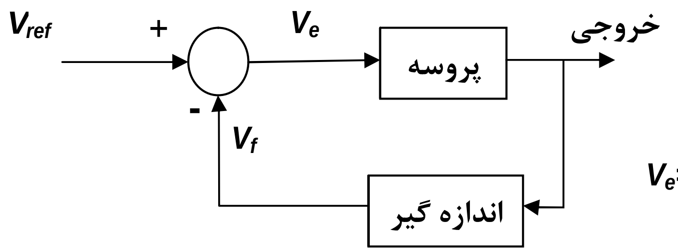
در سیستمهای حلقه بسته فیدبک می تواند بصورت مثبت یا منفی باشد و در سیستمهای کنترل فیدبک مثبت باعث ناپایداری و انهدام سیستمها می شود بنابراین همواره از فیدبک منفی استفاده می شود.

فیدبک مثبت :



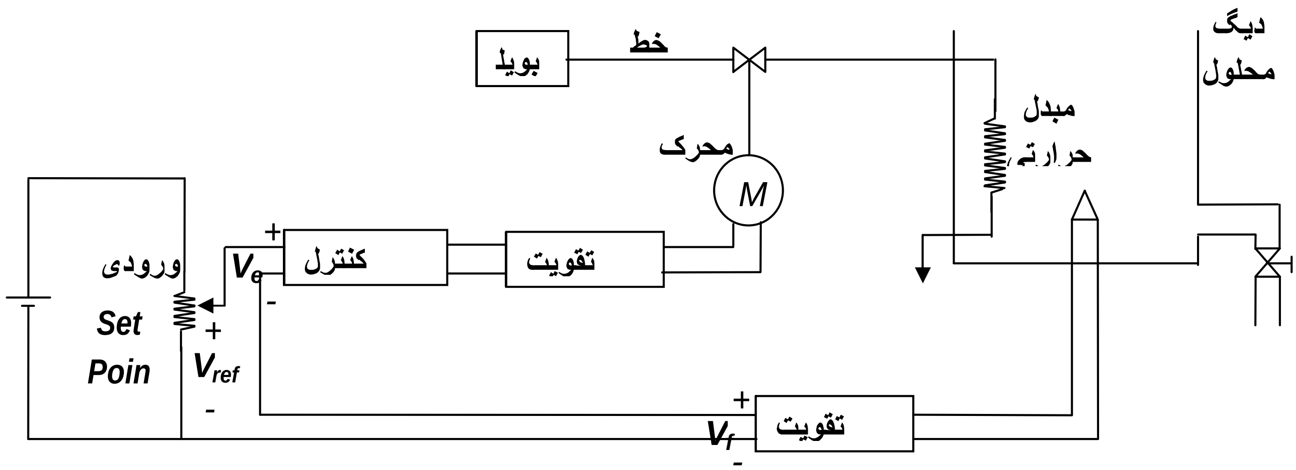
$V_e=V_{ref}+V_f$

فیدبک منفی :



$V_e=V_{ref}-V_f$

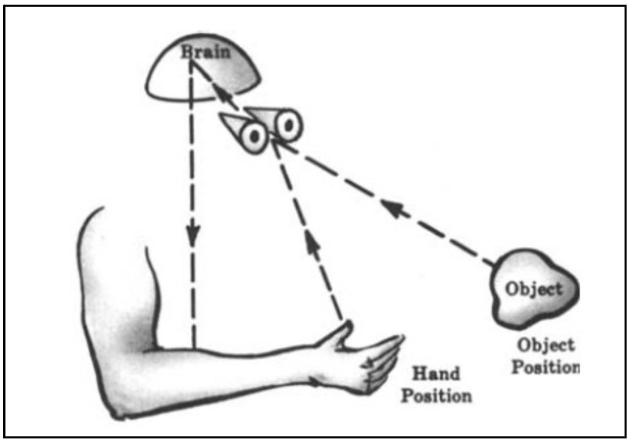
مثال ۱) در سیستم زیر یک فرآیند کنترل دمای محصول داخل دیگ مشاهده می شود. در این سیستم ورودی میزان دمای مطلوب داخل دیگ است و خروجی دمائی است که در هر لحظه توسط ترموکوپل اندازه گیری می شود و نمایش داده می شود. مبدل حرارتی عمل انتقال حرارت را از بخار داخل خود به محصول را انجام می دهد. و دبی بخار عبوری از مبدل حرارتی توسط شیر کنترل می شود. میزان باز یا بسته بودن شیر به محرک تنظیم می شود و سیگنالی که به محرک داده می شود سیگنال کنترلی است که از خروجی تقویت کننده بدست می آید.



اجزا اصلی یک سیستم کنترل :

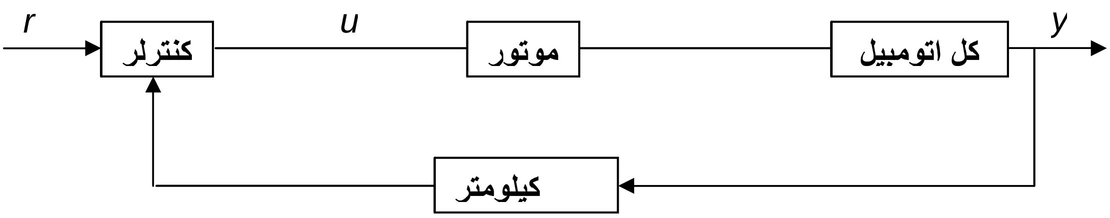
بطور کلی برای هر سیستم کنترلی می توان سه جزء اصلی در نظر گرفت که عبارتند از :

1. **سنسور**
2. **کنترلر**
3. **محرک**



سنسور مانند چشم در یک سیستم کنترلی عمل میکند. کنترلر بمانند مغز و محرکها بازوان یک سیستم کنترلی هستند

مثال ۲) فرض می کنیم اتومبیلی در سطح جاده با شیب متغیر در حرکت است چنان چه به ازای یک درجه چرخش پدال گاز اتومبیل سرعت ۱۰ کیلومتر بر ساعت تغییر کند و به ازا یک درصد تغییر در شیب جاده ۵ کیلومتر بر ساعت سرعت تغییر کند آنگاه معادلات سیستم را در حالت حلقه باز و حلقه بسته بنویسید:



r : سرعت مطلوب اتومبیل

u : چرخش پدال گاز اتومبیل

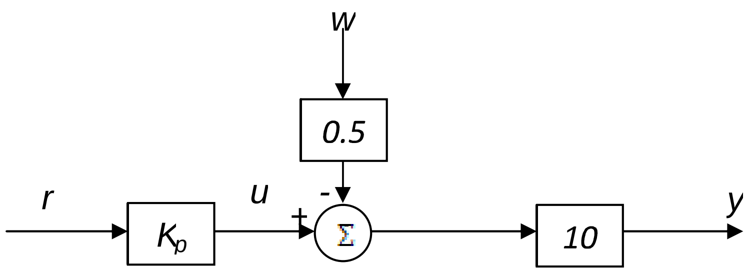
y : سرعت ماشین

w : شیب جاده

حل: با استفاده از صورت مسئله می توان یک معادله بصورت زیر برای سیستم بدست آورد:

$$y = 10u - 5w = 10(u - 0.5w)$$

الف) طراحی در حالت حلقه باز :



$$u = r * k_p$$

$$y = 10(u - 0.5w) = 10(r * k_p - 0.5w) = 10 * r * k_p - 5w$$

اگر بخواهیم در حالتی که شیب جاده صفر است سرعت اتومبیل با مقدار مطلوب یکی شود باید $k_p = {}^{1}/_{10}$ را قرار دهیم:

$$y = r - 5w$$

اگر سرعت مطلوب $50\, {}^{km}/_{h}$ باشد داریم :

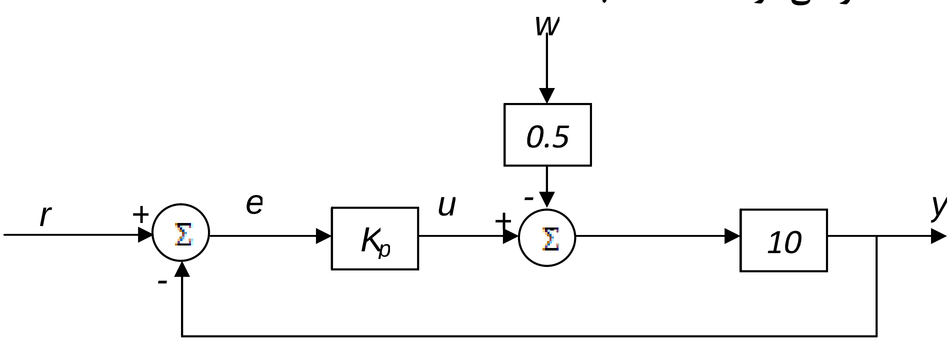
$$w = 0 \Rightarrow y = 50 - 0 = 50\left({}^{km}/_{h}\right)$$

$$w = 1 \Rightarrow y = 50 - 5 = 45\left({}^{km}/_{h}\right)$$

$$w = 2 \Rightarrow y = 50 - 10 = 40\left({}^{km}/_{h}\right)$$

ملاحظه می شود که در حالت کنترل حلقه باز سرعت اتومبیل چقدر زیاد به شیب جاده (اغتشاش) وابسته است بطوریکه به ازاء هر یک درصد شیب جاده $5Km$ از سرعت اتومبیل کاسته می شود.

طراحی در حالت حلقه بسته :



$$e = r - y$$

$$u = e * k_p$$

$$y = 10(u - 0.5w) = 10(e * k_p - 0.5w)$$

$$\Longrightarrow 10(r - y) * k_p - 5w$$

$$\Longrightarrow 10k_p * r - 10k_p * y - 5w$$

$$\Longrightarrow y(1 + 10k_p) = 10k_p * r - 5w$$

$$\Longrightarrow y = \frac{10k_p * r - 5w}{1 + 10k_p}$$

با فرض این که $k_p = 100$ باشد داریم :

$$y = \frac{1000}{1001} r - \frac{5}{1001} w = 0.999r - 0.005w$$

اگرسرعت مطلوب $50\ {km}/{h}$ باشد داریم :

1. $w = 0 \Longrightarrow y = 0.999 * 50 = 49.95({km}/{h})$
2. $w = 1 \Longrightarrow y = 0.999 * 50 - 0.005 = 49.945\left({km}/{h}\right)$
3. $w = 2 \Longrightarrow y = 0.999 * 50 - 0.01 = 49.94\left({km}/{h}\right)$

تبدیل لاپلاس: عملیات مربوط به تبدیل لاپلاس و عکس آن جزء لاینفک تحلیل سیستمهای کنترل خطی است.

در ادامه یادآوری در مورد تبدیل لاپلاس و عکس آن آورده شده است

اگر $f(t)$ را به عنوان یک تابع وابسته به زمان در نظر بگیریم، تبدیل آن را بصورت $F(s)$ تعریف میکنیم.
جدول صفحه بعد تبدیل لاپلاس چند تابع پر کاربرد را نشان می دهد:

یکی از عملیات مهمی که در کنترل مورد نیاز است تجزیه یک کسر به عاملهای اول است تا بتوان لاپلاس معکوس آن را بدست آوریم. در ادامه روشهای تجریه کسر را با ذکر چند مثال مرور می کنیم:

مثال) لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید و مقدار آنرا در زمان بینهایت بدست آورید:

$$Y(s) = \frac{4(s+50)}{s(s+20)(s+10)}$$

ابتدا تابع را بصورت زیر به کسرهای عامل اول تجزیه می کنیم:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s+20} + \frac{A_3}{s+10}$$

سپس مقادیر مجهول را بدست می آوریم:

$$A1 = lim_{S\to 0}[Y(S).S] = 1$$

$$A2 = lim_{S\to -20}[Y(S).(S+20)] = 0.6$$

$$A3 = lim_{S\to -10}[Y(s).(S+10)] = -1.6$$

و با محاسبه لاپلاس معکوس هر عبارت خواهیم داشت:

$$y(t) = 1 + 0.6e^{-20t} - 1.6e^{-10t}\ .$$

و مقدار نهائی را می توان با استفاده از قضیه مقدار نهائی لاپلاس بصورت زیر بدست آورد:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{4(s+50)}{s(s^2+30s+200)}\right] = 1$$

	$f(t)$	$F(s)$
1	Unit impulse $\delta(t)$	1
2	Unit step $1(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
13	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab}\left[1+\frac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})\right]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$

مثال) لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید:

$$F(s)=\frac{s^2+2s+2}{s^2+3s+2}=\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}$$

$$F(s)=b_2+\frac{c_{11}}{s+1}+\frac{c_{21}}{s+2}$$

با توجه به اینکه درجه صورت و مخرج با هم برابرند پس ضریب ثابت وجود دارد و مقدار آن از نسبت بزرگترین درجه صورت و مخرج بدست می آید و در اینجا برابر ۱ است.

$$c_{11}=(s+1)F(s)\big|_{s=-1}=\frac{s^2+2s+2}{s+2}\bigg|_{s=-1}=1$$

$$c_{21}=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=\frac{s^2+2s+2}{s+1}\bigg|_{s=-2}=-2$$

پس از تجزیه کسر می توان لاپلاس معکوس را

$$F(s)=1+\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}$$

بصورت زیر بدست آورد:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^2+2s+2}{(s+1)(s+2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[1+\frac{1}{s+1}-\frac{2}{s+2}\right]=\mathcal{L}^{-1}[1]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+2}\right]=\delta(t)+e^{-t}-2e^{-2t}$$

مثال) لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید:

$$F(s)=\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}$$

$$F(s)=\frac{c_{11}}{s+1}+\frac{c_{12}}{(s+1)^2}+\frac{c_{21}}{s+2}$$

$$c_{11}=\frac{d}{ds}(s+1)^2F(s)\bigg|_{s=-1}=\frac{d}{ds}\frac{1}{s+2}\bigg|_{s=-1}=-1$$

$$c_{12}=(s+1)^2F(s)\big|_{s=-1}=\frac{1}{s+2}\bigg|_{s=-1}=1$$

$$c_{21}=(s+2)F(s)\big|_{s=-2}=1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2(s+2)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{(s+1)^2}+\frac{1}{s+2}\right]$$

$$=-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]=-e^{-t}+te^{-t}+e^{-2t}$$

مثال) عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

$$T(S) = \frac{1+S}{S(S+2)^3(S+4)}$$

حل: تابع فوق را می توان به شکل زیر ساده کرد.

$$\frac{A}{S} + \frac{B}{S+4} + \frac{C}{(S+2)^3} + \frac{D}{(S+2)^2} + \frac{E}{S+2}$$

$$A = \lim_{S\to 0}[T(S).S] = \frac{1}{32}$$

$$B = \lim_{S\to -4}[T(S).(S+4)] = \frac{-3}{-4(-4+2)^3} = \frac{-3}{32}$$

$$C = \lim_{S\to -2}[T(s).(S+2)^3] = \frac{1}{4}$$

$$D = \lim_{S\to -2} \frac{d}{ds}[T(s).(S+2)^3] = \lim_{S\to -2} \frac{d}{ds}\left[\frac{S+1}{S^2+4S}\right]$$

$$= \lim_{S\to -2}\left[\frac{S^2+4S-(2S+4)(S+1)}{(S^2+4S)^2}\right] = \lim_{S\to -2}\left[\frac{-S^2-2S-4}{(S^2+4S)^2}\right] = \frac{-1}{4}$$

$$E = \lim_{S\to -2} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{ds^2}[T(S).(S+2)^3]$$

$$E = \lim_{S\to -2} \frac{1}{2}\left[\frac{(-2S-2)(S^2+4S)^2 - [2(2S+4)(S^2+4S)(-S^2-2S-4)]}{(S^2+4S)^4}\right] = \frac{-13}{256}$$

$$T(s) = \frac{1}{32}.\frac{1}{S} - \frac{3}{32}.\frac{1}{S+4} + \frac{1}{4}.\frac{1}{(S+2)^3} - \frac{1}{4}.\frac{1}{(S+2)^2} - \frac{13}{256}.\frac{1}{S+2}$$

$$\boxed{T(s) = \frac{1}{32}u(t) - \frac{3}{32}e^{-4t}u(t) + \frac{1}{4}\times\frac{1}{2!}t^2e^{-2t}u(t) - \frac{1}{4}te^{-2t}u(t) - \frac{13}{256}e^{-2t}u(t)}$$

مثال) عکس تبدیل لاپلاس تابع زیر را بدست آورید.

در مواقعی که تابع دارای قطب مختلط است یک راه موثر استفاده از روش زیر است . در این روش قطب مختلط را بصورت مرتبه دو قرار می دهیم و صورت آن را جمله ای با مرتبه یک s فرض می کنیم و با برابر قرار دادن آن با تایع اصلی، ضرایب مجهول بدست می آید

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + 2s + 2)} = \frac{a_1}{s} + \frac{a_2 s + a_3}{s^2 + 2s + 2}$$

$$1 = a_1(s^2 + 2s + 2) + (a_2 s + a_3)s$$

$$a_1 + a_2 = 0, \qquad 2a_1 + a_3 = 0, \qquad 2a_1 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a_3 = -1$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s + 2}{s^2 + 2s + 2}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s + 1)^2 + 1^2} - \frac{1}{2}\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1^2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}\sin t - \frac{1}{2}e^{-t}\cos t, \qquad \text{for } t \geq 0$$

تجزیه کسر به عاملهای اول بصورت گرافیکی:

یک روش تجزیه کسر به عاملهای اول استفاده از روش گرافیکی برای تعیین ضرایب مانده ها است.

برای بررسی این روش ابتدا به چند تعریف می پردازیم:

تابع $F(S)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s + z_1)(s + z_2)\cdots(s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2)\cdots(s + p_n)}, \qquad \text{for } m < n$$

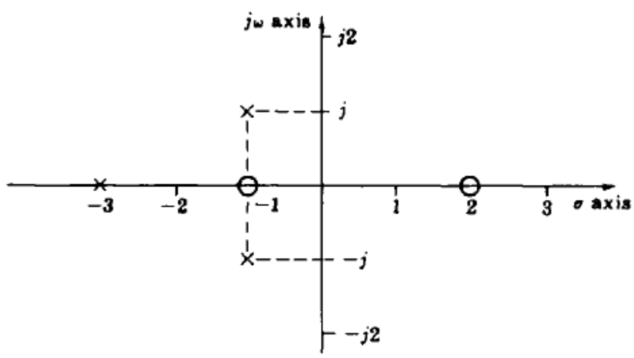
$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n}$$

که در آن درجه مخرج از صورت بزرگتر است. در این تابع مقادیر $zi, (i = 1,2, \dots m)$ و pi مقادیر حقیقی یا مختلط هستند. مقادیر $s = -zi$ که ریشه های صورت F(s) هستند و F(s) را صفر می کنند صفرهای تابع نامیده می شوند و مقادیر $s = -pi$ که ریشه های مخرج F(s) هستند و F(s) را بینهایت می کنند

قطبهای تابع نامیده می شوند. همچنین به $ak,(k=1,2,..n)$ ضرایب مانده در قطب pk نامیده می شود که مقادیر حقیقی یا مختلط هستند. بعنوان مثال ضریب $a1$ مانده قطب $p1$ و ضریب $a2$ مانده در قطب $p2$ و ... می باشد. در روش محاسبه گرافیکی ضرایب مانده که در ادامه گفته می شود می خواهیم مقادیر $ak,(k=1,2,..n)$ را بصورت ترسیمی بدست آوریم. این روش خصوصاً زمانی که تابع $F(s)$ دارای قطبها و صفرهای مختلط متعدد باشد بسیار مفید است. لازم به ذکر است که این روش برای ریشه های تکراری مورد استفاده قرار نمی گیرد.

همانطور که گفته شد صفر ها و قطبها می توانند مقادیر مختلط باشند. بنابر این برای رسم آنها باید صفحه ای مختلط در نظر گرفت که صفحه مختلط s نامیده می شود. اگر متغیر مختلط $s = \sigma + jw$ را تعریف کنیم در این صفحه محور افقی محور حقیقی است که با $Re\,[s]$ و یا σ نمایش داده می شود و محور عمودی، محور موهومی است که با $Im[s]$ و یا jw مشخص می شود. در این صفحه صفرها با علامت دایره و قطبها با علامت ضربدر در مختصات خودشان قرار می گیرند. در شکل زیر بعنوان مثال قطبها و صفر های تابع $F(s)$ را در صفحه s رسم کرده ایم.

$$F(s) = \frac{(s+1)(s-2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$



برای محاسبه ضریب مانده ak بصورت زیر عمل می کنیم:

۱- از تمام صفر ها و قطبهای موجود یک بردار به قطب pk رسم می کنیم (انتهای بردارها روی قطب pk قرار دارد)

۲- اندازه تمام بردارهای رسم شده را با توجه به مختصات ابتدا و انتهای آنها بدست می آوریم.

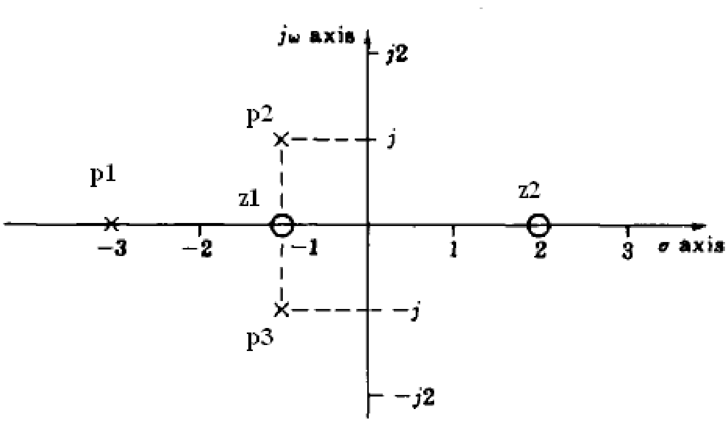
۳- زاویه ای را که هر بردار با محور حقیقی مثبت در صفحه s تشکیل می دهد را محاسبه می کنیم.

۴- ضریب ak را که یک عدد مختلط است را بصورت $ak = |ak| < \varphi k$ در نظر میگیریم.

۵- اندازه ak = (حاصلضرب اندازه بردارهائی که از صفر ها شروع می شود) تقسیم بر (حاصلضرب اندازه بردارهائی که از قطب ها شروع می شود)

۶- زاویه ak = (مجموع زاویه های بردارهائی که از صفر ها شروع می شود) منهای (مجموع زاویه های بردارهائی که از قطبها شروع می شود)

بعنوان یک مثال می خواهیم تابع $F(s)$ را که در بالا دیدیم به کسرهای جزئی تبدیل کنیم. با توجه به اینکه سه قطب وجود دارد پس سه جمله داریم: $F(s) = \frac{a1}{s+3} + \frac{a2}{s+1+j} + \frac{a3}{s+1-j}$



اندازه ها را بصورت زیر بد

$$|a1| = \frac{|\overrightarrow{z1p1}|*|\overrightarrow{z2p1}|}{|\overrightarrow{p2p1}|*|\overrightarrow{p3p1}|} = \frac{2*5}{\sqrt{5}*\sqrt{5}} = 2$$

$$|a2| = \frac{|\overrightarrow{z1p2}|*|\overrightarrow{z2p2}|}{|\overrightarrow{p1p2}|*|\overrightarrow{p3p2}|} = \frac{1*\sqrt{10}}{\sqrt{5}*2} = 0.707$$

$$|a3| = \frac{|\overrightarrow{z1p3}|*|\overrightarrow{z2p3}|}{|\overrightarrow{p1p3}|*|\overrightarrow{p2p3}|} = \frac{1*\sqrt{10}}{\sqrt{5}*2} = 0.707$$

و برای زاویه ها داریم:

$$\varphi 1 = (< z1p1 + < z2p1) - (< p2p1 + < p3p1) =$$
$$(180 + 180) - \left((180 + tan^{-1}\frac{1}{2}) + (180 - tan^{-1}\frac{1}{2})\right) = 0$$

$$\varphi 2 = (< z1p2 + < z2p2) - (< p1p2 + < p3p2) =$$
$$\left(90 + (180 - tan^{-1}\frac{1}{3}\right) - \left((tan^{-1}\frac{1}{2}) + 90\right) = 135$$

$$\varphi 3 = (< z1p3 + < z2p3) - (< p1p3 + < p2p3) =$$
$$\left(-90 + (180 + tan^{-1}\frac{1}{3}\right) - \left((-tan^{-1}\frac{1}{2}) - 90\right) = -135$$

در نتیجه ضرایب مانده بصورت زیر خواهد شد:

$$a1 = 2$$
$$a2 = 0.707 < 135 = -0.5 + j0.5$$
$$a3 = 0.707 < -135 = -0.5 - j0.5$$

ملاحظه می شود که قطب حقیقی دارای مانده حقیقی و است و فقط از روی زاویه علامت آنرا بدست می آوریم و همچنین چون قطبهای مختلط حتماً بصورت مزدوج هستند در نتیجه مانده آنها هم بصورت مزدوج است و فقط کافی است یکی از آنها بدست آید.

$$F(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{-0.5+j0.5}{s+1+j} + \frac{-0.5-j0.5}{s+1-j}$$

تمرین)لاپلاس معکوس توابع زیر را بدست آورید؟

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3}$$

$$X_{(s)} = \frac{7s + 2}{(s + 1)(s + 3)^3}$$

فصل دوم

مدل سازی ریاضی سیستمهای فیزیکی

روش های نمایش و مدل کردن سیستم های کنترلی:

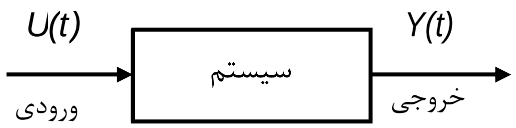
۱. معادله دیفرانسیل مرتبه بالا یا *HODE (High Order Differential Eqution)*
۲. تابع تبدیل یا *TF (Transfer Function)*
- نمایش و ساده سازی با استفاده از دیاگرام بلوکی
- نمایش و ساده سازی بصورت نمودار گذر سیگنال و فرمول بهره میسون

۳. معادلات حالت یا *SS (State-Space)*
۴. نمودار حالت یا *SD (State-Diagram)*

از این چهار روش دو روش اول در این فصل تحت عنوان مدلسازی ریاضی مورد بررسی قرار می گیرند و دو روش بعدی در فصل آینده خواهند بود.

نمایش سیستم بصورت *HODE*:

مدل ریاضی سیستم ها:



مدلسازی ریاضی برای سیستمهای کنترل به معنی یافتن یک رابطه بین متغیرهای سیستم بصورت زیر است.

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, \dots, y', y, u^{(m)}, \dots \quad u', u)$$

که این رابطه در اصل یک معادله دیفرانسیل را بین ورودی و خروجی و مشتقات آنها ایجاد می کند که می توانیم توسط آن روابط موجود در سیستم کنترلی را بدست آوریم یا بعبارت دیگر سیستم را بصورت $HODE$ نمایش دهیم یا مدل کنیم.

انواع متغییرها در سیستم های فیزیکی:

۱. *Variable Across Element* : متغییرهایی که نسبت به یک مبنا سنجیده می شوند یا نسبت به دو سر یک المان اندازه گیری می شوند. مثل: اختلاف پتانسیل، اختلاف فشار، اختلاف سرعت، اختلاف دما
۲. *Variable Through Element* : متغییرهای که به شکل عبور از یک المان یا جسم اندازه گیری می شوند. مثل: جریان، نیرو، دبی، گشتاور

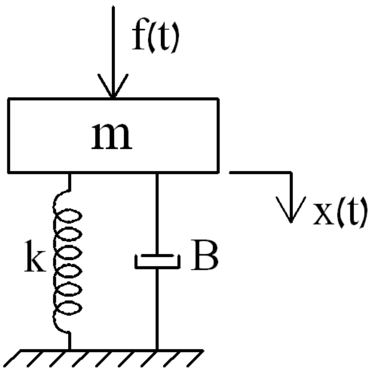
به طور کلی برای هر سیستم فیزیکی سه المان اصلی وجود دارد:

۱. المان مصرف کننده
۲. المان ذخیره کننده
۳. المان القاء کننده

قوانین حاکم	المان القاء کننده	المان ذخیره کننده	المان مصرف کننده	متغییر عبوری	متغییر ظرفیتی	
KCL,KVL	$v = L\frac{di}{dt}$ سلف	$i = C\frac{dv}{dt}$ خازن	$i = \frac{1}{R}v$ مقاومت	$i(t)$ جریان	$v(t)$ ولتاژ	سیستم های الکتریکی
$\sum F = m.a$	$V = \frac{1}{K}\frac{dF}{dt}$ فنر	$F = M\frac{dV}{dt}$ جرم	$F=B.V$ دمپر	$F[N]$ نیرو	$V\left[\frac{m}{s}\right]$ سرعت	سیستم های مکانیکی
$\sum T=J.a$	$w = \frac{1}{K}\frac{dT}{dt}$ فنر چرخشی	$T = J\frac{dw}{dt}$ ممان اینرسی	$T = B.W$ دمپر چرخشی	$T[N.M]$ گشتاور	$W\left[\frac{rad}{s}\right]$ سرعت زاویه ای	سیستم های مکانیکی چرخشی
اصل بقاء جرم و انرژی	$P = I\frac{dQ}{dt}$ اینرسی سیال	$Q = Cf\frac{dP}{dt}$ ظرفیت سیال	$Q = \frac{1}{Rf}.P$ مقاومت سیال	$Q\left[\frac{m^3}{s}\right]$ دبی	$P[p]$ فشار	سیستم سیالات

تذکر: از مقایسه سیستمهای الکتریکی و مکانیکی نتیجه می شود که برای مدلسازی یک سیستم مکانیکی بکمک المانهای الکتریکی، مقاومت وسلف بکار رفته در سیستم الکتریکی باید مقادیر عکس دمپر و فنر در سیستم مکانیکی داشته باشند.

مثال(۱-۲) : مدل ریاضی سیستم زیر را بدست آورید.



حل: در اینگونه مثالها همواره معادلات را برای حالت تعادل سیستم بدست می آوریم یعنی فرض میشود که وزن جرم با نیروی اولیه فنر خنثی شده است.

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\sum F = m.a$$

$$f(t) - F_K - F_B = m.a$$

اگر خروجی سیستم را سرعت جرم فرض کنیم رابطه بین ورودی و خروجی پروسه بصورت زیر است:

$$f(t) - K\int_0^t v(t)dt - B.v(t) = m\frac{dv(t)}{dt}$$

و اگر خروجی سیستم را موقعیت جرم فرض کنیم رابطه بین ورودی و خروجی پروسه بصورت زیر خواهد بود:

$$f(t) - K.x(t) - B\frac{dx(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

که عبارت ساده شده آن بشکل مقابل است:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

مثال (۲-۲): سیستم مثال قبل را به یک سیستم الکتریکی تبدیل کنید.

حل: معادلات را بر حسب سرعت جرم باز نویسی می کنیم.

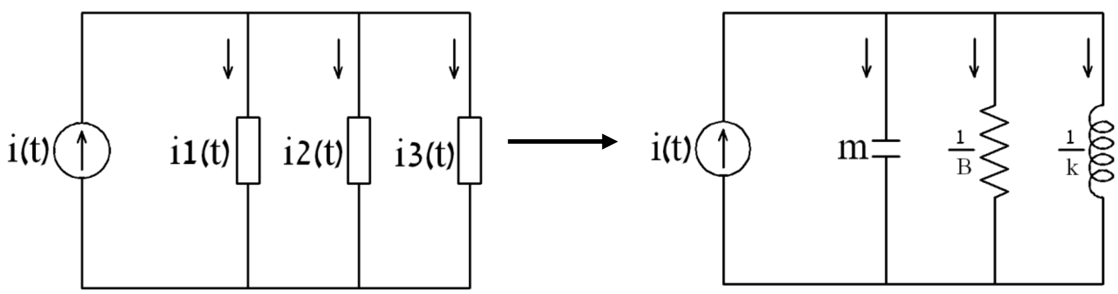
$$f(t) = m\frac{dv(t)}{dt} + B.v(t) + K\int_0^t v(t)$$

ملاحضه می شود که نیروی وارد شده به سیستم به سه بخش تقسیم می شود. اگر نیرو را معادل جریان قرار دهیم که هر دو از نوع متغیر عبوری هستند دیده می شود که جریان باید بین سه شاخه تقسیم شود. پس مدار الکتریکی بصورت موازی خواهد بود که توسط یک منبع جریان تغذیه می شود.

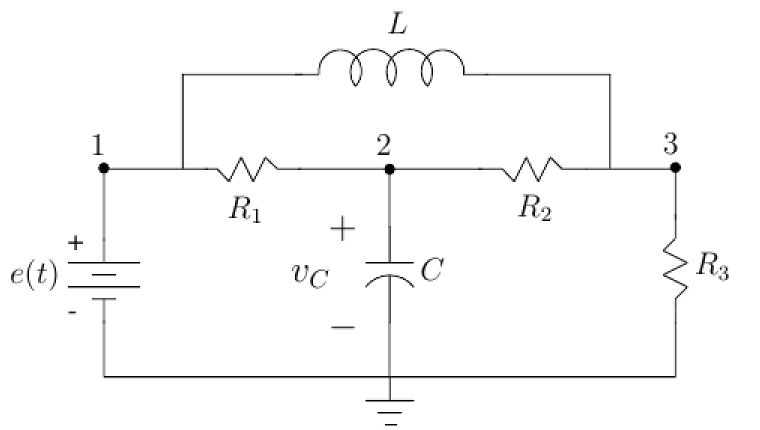
$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$i(t) = c\frac{dV(t)}{dt} + \frac{1}{R}V(t) + \frac{1}{L}\int_0^t V(t)dt$$

در نتیجه یک مدار RLC موازی داریم که مقادیر آن بر حسب اجزاء سیستم مکانیکی بصورت زیر است.



مثال (۳-۲): معادلات دینامیکی را برای سیستم الکتریکی زیر بدست آورید:



با نوشتن معادلات KCL برای گره های ۲ و ۳ معادلات زیر را خواهیم داشت. توجه کنید که چون سیستم دارای دو عنصر ذخیره کننده انرژی است معادلات دینامیکی آن می تواند از دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول، یا یک معادله مرتبه دوم تشکیل شود.

$$\begin{aligned} \frac{v_2 - v_1}{R_1} + C\frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2 - v_3}{R_2} &= 0 \\ \frac{v_3}{R_3} + \frac{v_3 - v_2}{R_2} + \frac{1}{L}\int_0^t (v_3(\tau) - v_1(\tau))d\tau &= 0 \end{aligned}$$

برای سادگی تمامی مقادیر المانهای مدار را یک فرض می کنیم. همچنین فرض می کنیم که خروجی مدار $vc(t)$

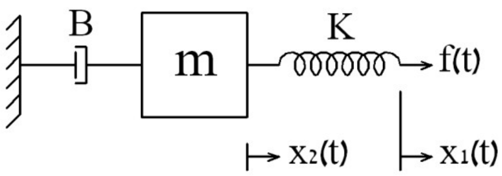
و ورودی آن e باشد. بنابراین رابطه ورودی و خروجی سیستم را می توان توسط دو معادله زیر که بوسیله متغییر $v3$ به همدیگر مرتبط هستند نمایش داد:

$$\begin{aligned} (v_C - e) + \frac{dv_C}{dt} + (v_C - v_3) &= 0 \\ v_3 + (v_3 - v_C) + \int_0^t (v_3(\tau) - e(\tau))d\tau &= 0 \end{aligned}$$

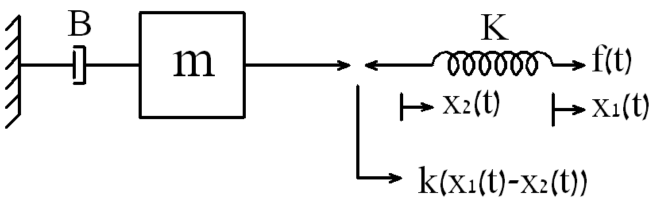
با حذف $v3$ از دو معادله فوق می توان رابطه ورودی و خروجی سیستم را بصورت یک معادله مرتبه دو نمایش داد:

$$\frac{d^2vc}{d^2t} + 2\frac{dvc}{dt} + vc = \frac{de}{dt} + e$$

مثال(۴-۲) : معادلات دینامیکی را برای سیستم زیر بدست آورید.



حل:



معادلات برای سیستم حالت تعادل(جسم آزاد) برای فنر و جسم بصورت زیر است:

$$f(t) = k\big(x_1(t) - x_2(t)\big)$$

$$k\big(x_1(t) - x_2(t)\big) - B.\frac{dx_2(t)}{dt} = m.\frac{d^2x_2(t)}{dt^2}$$

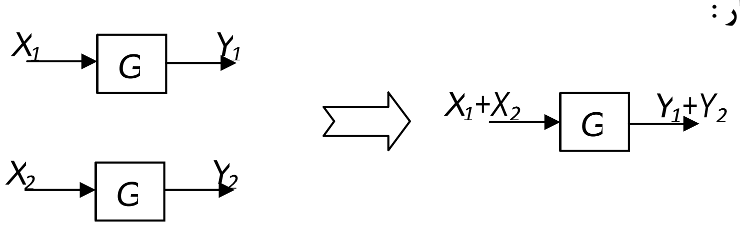
و از آنجا با توجه به اینکه در سیستم دو جابجائی داریم، دو معادله دیفرانسیل نیز خواهیم داشت که بصورت دستگاه زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) + \dfrac{1}{k} f(t) \\ \dfrac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + \dfrac{B}{m}\dfrac{dx_2}{dt} + \dfrac{k}{m}.x_2(t) = \dfrac{k}{m}.x_1(t) \end{cases}$$

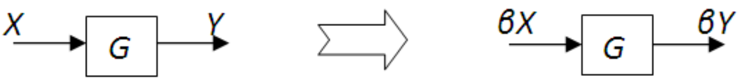
خواص سیستمهای خطی :

اکثر سیستمهای فیزیکی در محدوده مشخصی از متغیرها بصورت خطی عمل میکنند. ولی در صورتی که دامنه متغییرها خیلی زیاد شوند رفتار غیر خطی از خود بروز می هند. برای اینکه یک سیستم رفتار خطی داشته باشد دو شرط زیر را باید دارا باشد

الف) خاصیت ترکیب یا جمع آثار :



ب) خاصیت همگنی :



مثال (۵-۲): خواص سیستمهای زیر را مشخص کنید :

$y = x^2$ (خاصیت ترکیب و همگنی ندارد لذا سیستم خطی نیست)

$y = mx + b$ (خاصیت همگنی ندارد لذا سیستم خطی نیست)

در سیستم دوم خاصیت همگنی وجود ندارد و سیستم غیر خطی است ولی با این وجود در صورتی که تغییرات ورودی و خروجی کوچک باشد می توان این سیستم را حول یک نقطه کار مانند x_0 و y_0 خطی کرد. وقتی که $x = x_0 + \Delta x$ و $y = y_0 + \Delta y$ آنگاه داریم:

که $\Delta y = m\Delta x$ هر دو شرط فوق را داراست و خطی است. در ادامه روال کلی خطی کردن یک سیستم را در محدوده تغییرات محدود متغییرها، حول یک نقطه کار بررسی می کنیم.

خطی کردن سیستمهای کنترل حول نقطه کار :

در سیستم $y(t) = g(x(t))$ که در آن $g(x(t))$ نشان می دهد که $y(t)$ تابعی از $x(t)$ است، این سیستم در نقطه کار x_0 دارای یک نقطه پیوسته است وبسط تیلور در آن صادق است.

$$y = g_{(x)} = g_{(x_0)} + \frac{dg}{dx}|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{d^2g}{dx^2}|_{x=x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \cdots$$

با فرض این که $(x - x_0)$ خیلی کوچک باشد داریم :

$$y = g_{(x)} = g_{(x_0)} + \frac{dg}{dx}|_{x=x_0}(x - x_0)$$

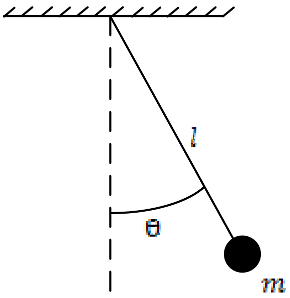
$$\Longrightarrow y = y_0 + m(x - x_0)$$

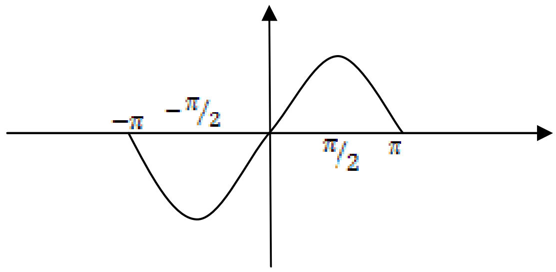
که در آن $m = \frac{dg}{dx}|_{x=x_0}(x - x_0)$ شیب منحنی در نقطه کار است.

$$\Longrightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \qquad \text{یا} \qquad \Delta\, y = m.\Delta\, x$$

که در محدوده نقطه کار یک سیستم خطی است.

مثال(۶-۲): مدل نوسان پاندول:





در این مثال می خواهیم یک مدل برای گشتاور ناشی از حرکت دورانی یک جرم را بدست آوریم. گشتاور جرم این پاندول برابراست با:

$$T = mgl\sin\theta$$

که در آن g ثابت جاذبه است.

درحالت تعادل $\Longrightarrow T_0 = 0 , \theta_0 = 0$

حال تقریب خطی را با استفاده از مشتق اول سیستم در نقطه تعادل بدست می آوریم:

$$T = T_{(\theta_0)} + \frac{dT}{d\theta}|_{\theta=\theta_0} * (\theta - \theta_0)$$

$$\Longrightarrow T = T_0 + mgl\cos(\theta)|_{\theta=0} * (\theta - \theta_0)$$

$$\Longrightarrow T - T_0 = mgl\cos(0) * (\theta - 0)$$

$$\Longrightarrow T = mgl\theta \qquad \forall \qquad -\pi/4 \le \theta \le \pi/4$$ در محدوده نقطه تعادل

مثال (۷-۲): ترمیستوری دارای پاسخ دمائی زیر است:

که در آن $R_0 = 10{,}000\Omega$ ، مقاومت=R و دما = T بر حسب سلسیوس است. مدل خطی را برای کار ترمیستور در دمای $T = 20^{\circ}c$ و تغییرات کوچکی از دما را پیدا کنید.

حل: تابع $f(T)$ را بصورت زیر تعریف میکنیم:

$$f(T) = R = R_0 e^{-0.1T}$$

حال داریم:

$$\Delta R = f(T) - f(T_0)\ , \quad \Delta T = T - T_0\ .$$

$$\Delta R = f(T) - f(T_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{T=T_0=20^{\circ}} \Delta T + \cdots$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial T}\right|_{T=T_0=20^{\circ}} = -0.1 R_0 e^{-0.1T_0} = -135,$$

و در نهایت با قرار دادن مقادیر ثابت داریم:

$$\Delta R = -135 \Delta T$$

که یک رابطه خطی بین تغییرات مقاومت و تغییرات محدود دما را در ترمیستور نمایش می دهد.

مثال (۸-۲): خروجی y و ورودی x از یک سیستم بصورت زیر با هم مرتبط هستند:

$$y = x + 1.4x^3$$

الف) مقادیر خروجی را برای حالت ماندگار در دو نقطه کار $x_0 = 1$ و $x_0 = 2$ بدست آورید.

ب) مدل خطی را برای دو هر دو نقطه بدست آورید و با هم مقایسه کنید.

حل: الف) مقادیر خروجی در حالت مانگار به راحتی از قرار دادن نقطه کار در معادله بدست می آید:

$$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 2.4$$
$$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 13.2$$

ب) معادله خطی بصورت □$y = m\Delta x$ خواهد بود که در آن m بصورت زیر تعریف می شود:

$$m = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_o}$$

بنابر این در هر یک از نقاط کار خواهیم داشت:

$$m = \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x_o} = 1 + 4.2x_o^2\ .$$

که داریم:

$$x_0 = 1 \Rightarrow m = 5.2 \qquad , \qquad x_0 = 2 \Rightarrow m = 18.8$$

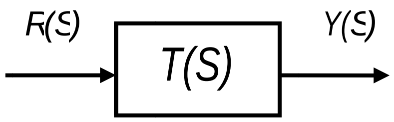
تمرین (۱-۲): یک فنر که در یک کمک فنر بکار رفته است نیروی f را بصورت رابطه $f = kx^4$ تولید می کند. که در آن x جابجائی فنر است. یک مدل خطی برای فنر وقتی $x_0 = 1$ است بدست آورید.

نمایش سیستم بصورت TF :

تابع تبدیل:

برای هر سیستم کنترلی تابع تبدیل به صورت زیر تعریف میشود، مشروط برآنکه **تمام شرایط اولیه صفر** باشد.

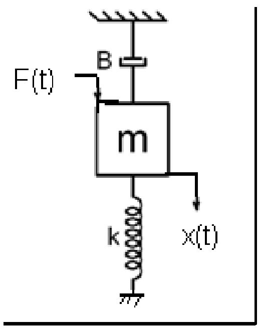
$$\boldsymbol{T(S)} = \frac{\text{لاپلاس خروجی}}{\text{لاپلاس ورودی}} = \frac{\boldsymbol{Y(S)}}{\boldsymbol{R(S)}}$$



تابع تبدیل برای سیستم های خطی غیر متغیر با زمان تعریف می شود وتنها رابطه یک خروجی نسبت به یک ورودی در یک سیستم را بیان می کند.

مثال(۹-۲): در سیستم زیر تابع تبدیل را به دست آورید.

ورودی : $f(t)$ خروجی : $x(t)$



حل: در بخش قبلی معادله دینامیکی سیستم را بدست آورده ایم:

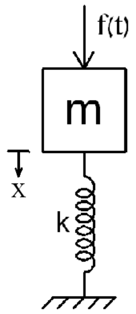
$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + B\frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = f(t)$$

برای بدست آوردن تابع تبدیل کافیست از معادله دینامیک سیستم که رابطه خروجی و ورودی سیستم را بیان می کند، تبدیل لاپلاس بگیریم:

$$mS^2X(S) + BSX(S) + KX(S) = F(S) \Rightarrow T(S) = \frac{X(S)}{F(S)} = \frac{1}{mS^2+BS+K}$$

مثال(۸-۲): برای سیستم زیر ابتدا تابع تبدیل را بدست آورید،

سپس پاسخ را به ازاء ورودی ضربه $\delta(t)$ بررسی کنید.



حل:

$$f(t) = m\frac{d^2x}{dt^2} + kx \to F(S) = mS^2.X(S) + KX(s)$$

$$T(S) = \frac{X(S)}{F(s)} = \frac{1}{mS^2+K} \quad \leftarrow$$ تابع تبدیل سیستم

$$X(S) = \frac{F(S)}{mS^2+K} = \frac{1}{mS^2+K} = \frac{1}{m}.\frac{1}{S^2+\frac{K}{m}} = \frac{1}{m}.\frac{1}{S^2+\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\right)^2}.\frac{\sqrt{\frac{K}{m}}}{\sqrt{\frac{K}{m}}}$$

$$L^{-1} \to x(t) = \frac{1}{\sqrt{mK}}.sin(\sqrt{\frac{K}{m}}t)\ u(t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \to 2\pi f = \sqrt{\frac{K}{m}} \to f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}}$$

مشاهده می شود که در این سیستم چون هیچ عنصر تلف کننده انرژی (دمپر) وجود ندارد بنابر این خروجی سیستم دائما بصورت نوسانی است و هیچگاه به حالت مانا نخواهد رسید.

مثال(۹-۲) تابع تبدیل مثال (۳-۲) را بدست آورید.

حل: از مثال (۳-۲) دو معادله بدست آمده برای سیستم را بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} (v_C - e) + \frac{dv_C}{dt} + (v_C - v_3) &= 0 \\ v_3 + (v_3 - v_C) + \int_0^t (v_3(\tau) - e(\tau))d\tau &= 0 \end{aligned}$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از دو معادله فوق خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (V_C - E) + sV_C + (V_C - V_3) &= 0 \\ V_3 + (V_3 - V_C) + \frac{1}{s}(V_3 - E) &= 0 \end{aligned}$$

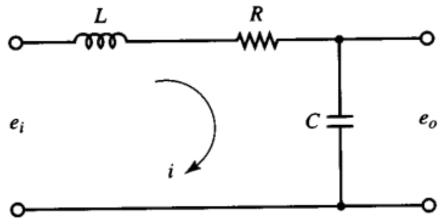
از معادله اول می توان ولتاژ گره ۳ را بدست آورد:

$$V_3 = (s+2)V_C - E$$

و با جایگذاری در معادله پائین و چند عملیات ساده بدست می آوریم:

$$V_3 + (V_3 - V_C) + \frac{1}{s}(V_3 - E) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (s+2)V_C - E + ((s+2)V_C - E - V_C) + \frac{1}{s}((s+2)V_C - E - E) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad s(s+2)V_C - sE + s(s+1)V_C - sE + (s+2)V_C - 2E = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad V_C(2s^2 + 4s + 2) = E(2s+2)$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{V_C}{E} = \frac{s+1}{s^2+2s+1}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{V_C}{E} = \frac{1}{s+1}$$

مثال(۱۰-۲) تابع تبدیل مدار RLC زیر را بدست آورید:



$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e_i$$
$$\frac{1}{C}\int i\,dt = e_o$$

با گرفتن تبدیل لاپلاس از معادلات و با فرض اینکه ورودی سیستم ei و خروجی آن eo باشد، خواهیم داشت:

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_i(s)$$
$$\frac{1}{C}\frac{1}{s}I(s) = E_o(s)$$
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

مثال(۱۱-۲) اگر در سیستمی با تابع تبدیل زیر $r(t)$ ورودی و $y(t)$ خروجی باشد، $y(t)$ را به ازاء ورودی پله واحد بدست آورید:

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{10(S+2)}{S^2+8S+15}$$

اگر ورودی بصورت پله واحد باشد، خروجی بصورت زیر خواهد بود که با تجزیه کسر و عکس تبدیل لاپلاس به پاسخ مطلوب می رسیم:

$$Y(S) = \frac{10(S+2)}{S(S+3)(S+5)}$$

$$Y(s) = \frac{4}{3s} + \frac{5}{3}\frac{1}{s+3} - 3\frac{1}{s+5} \qquad y(t) = \frac{4}{3} + \frac{5}{3}e^{-3t} - 3e^{-5t}$$

تمرین (۲-۲): در سیستم مثال(۴-۲) تابع تبدیلهای زیر را بدست آورید.

تمرین(۳-۲): در سیستم جرم و فنر(مثال۹) با فرض ورودی پله $u(t)$ پاسخ را بدست آورید و رسم کنید.

چند تعریف در مورد تابع تبدیل:

فرض کنیم تابع تبدیل برای یک سیستم بصورت $T(S) = \frac{P(S)}{q(S)}$ موجود باشد که در آن $p(S)$و $q(S)$ دو چند جمله ای برحسب S هستند. اولین شرط برای بررسی این سیستم این است که درجه صورت از درجه مخرج بزرگتر نباشد. این شرط به این مفهوم است که سیستم علی باشد. اگر درجه صورت از مخرج بزرگتر باشد یعنی سیستم علی نیست.

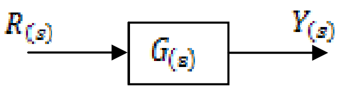
وقتی چند جمله ای مخرج، $q(s)$ را برابر صفر قرار می دهیم، آن را **معادله مشخصه سیستم** می گوئیم. زیرا ریشه های این معادله مشخصه پاسخ زمانی را تعیین می کند. ریشه های این معادله را **قطبهای سیستم** می نامند. و ریشه های چند جمله ای صورت، $p(s)$ را صفر های سیستم می نامند. قطبها و صفرها فرکانسهای بحرانی سیستم را تشکیل می دهند. قطبها پاسخ سیستم را بینهایت می کنند و صفرها پاسخ را صفر می کنند. نمودار قطبها و صفرهای یک سیستم را می توان در صفحه مختلط S بصورت گرافیکی رسم کرد.

مثال (۱۲-۲): تابع زیر مفروض است:

$$Y(S) = \frac{S+3}{S^2+3S+2} = \frac{S+3}{(S+1)(S+2)}$$

که در آن معادله $S^2+3S+2=0$ معادله مشخصه سیستم است. $S=-1$ و $S=-2$ قطبهای تابع و $S=-3$ صفر تابع است. قطبها و صفرهای تابع را می توان بصورت گرافیکی نیز مشاهده کرد که در فصل اول مورد بررسی قرار گرفت.

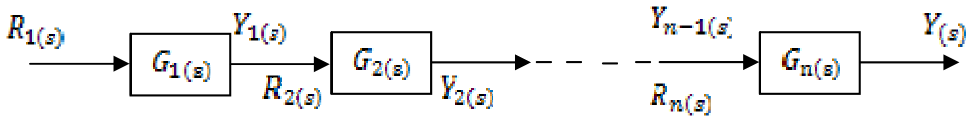
دیاگرام بلوکی : یک روش برای نمایش سیستمهای کنترلی در حالت تابع تبدیل استفاده از نمودار بلوکی است. در نمودار بلوکی هر بخش از سیستم توسط یک بلوک نمایش داده می شود که تابع تبدیل آن داخل بلوک نوشته می شود.



$$G_{(s)}=\frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}}$$

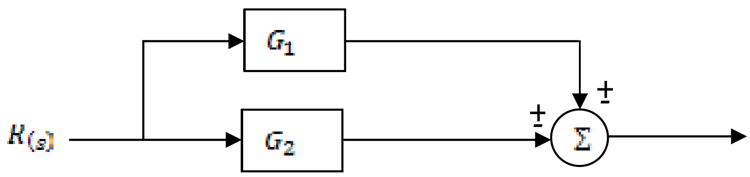
در ادامه چند معادل پر کاربرد را در ساده سازی نمودارهای بلوکی مشاهده می کنیم.

- **ترکیب سری :**



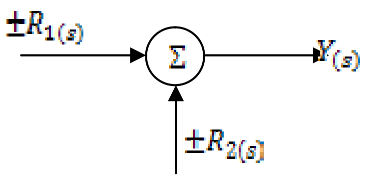
$$\frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}}=G_{1(s)}*G_{2(s)}*\ldots*G_{n(s)}$$

- **ترکیب موازی :**



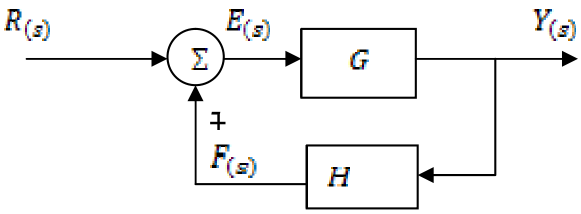
$$Y_{(s)}=R_{(s)}(\pm G_1\pm G_2)$$

- **بلوک جمع کننده :**



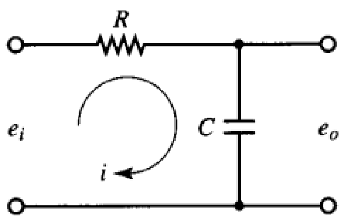
$$Y_{(s)}=\pm R_{1(s)}\pm R_{2(s)}$$

- **فیدبک** : تابع تبدیل معادل برای یک حلقه فیدبک بصورت زیر بدست می آید.



$$\frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{G}{1 \pm GH}$$

مثال(۱۳-۲) دیاگرام بلوکی سیستم زیر را رسم کنید.

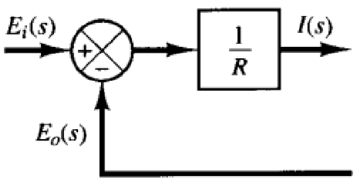


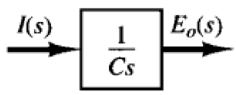
با نوشتن معادلات دینامیک برای سیستم و انتقال آن به حوزه لاپلاس با فرض صفر بودن شرایط اولیه داریم:

$$i = \frac{e_i - e_o}{R} \qquad \Rightarrow \qquad I(s) = \frac{E_i(s) - E_o(s)}{R}$$

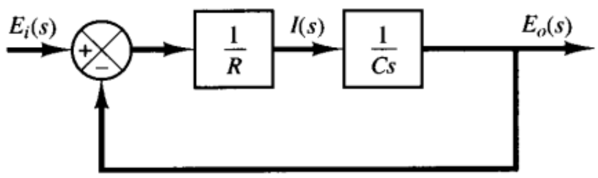
$$e_o = \frac{\int i\,dt}{C} \qquad \qquad E_o(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

دو معادله فوق را می توان بصورت دو دیاگرام زیر نمایش داد:

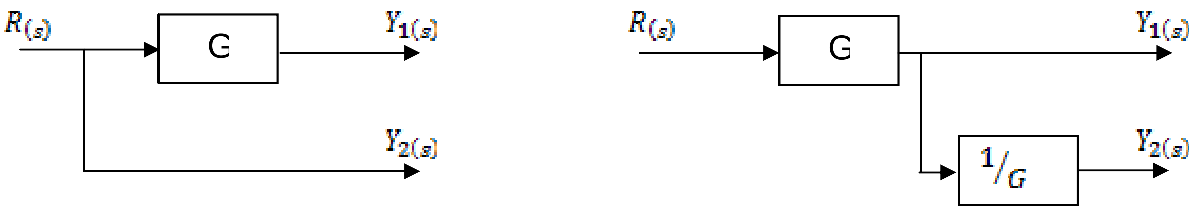




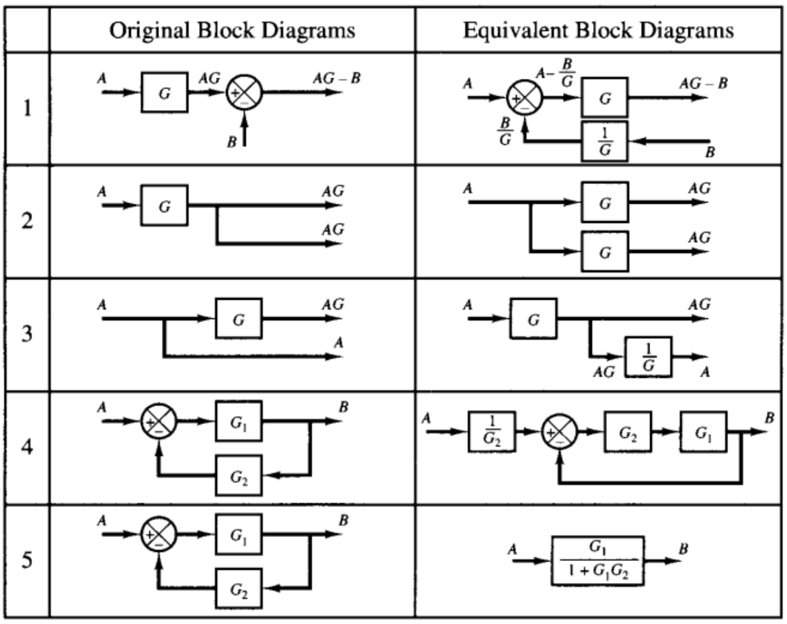
و در نهایت با کنار هم قرار دادن دو دیاگرام فوق خواهیم داشت:



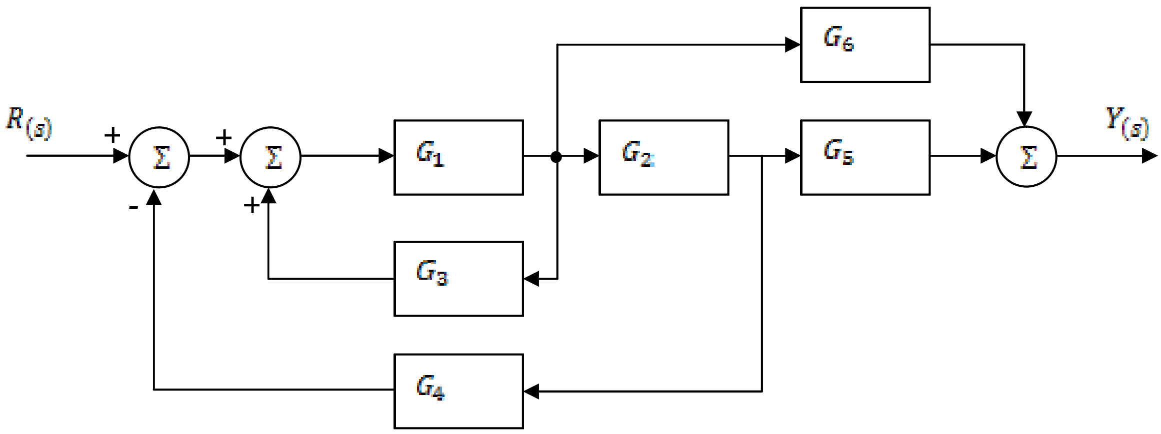
- **انتقال گره :**



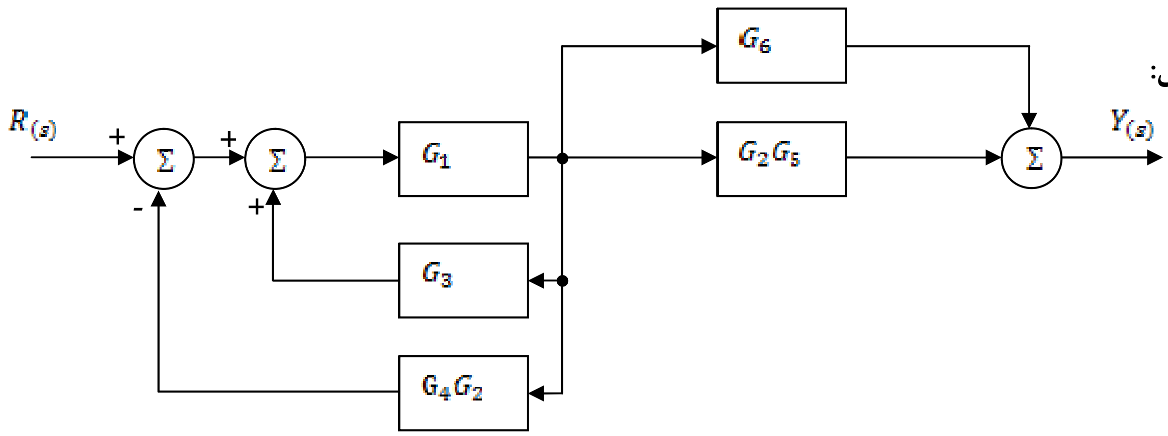
جدول زیر چند عمل پرکاربرد در ساده سازی را بطور خلاصه نمایش می دهد:

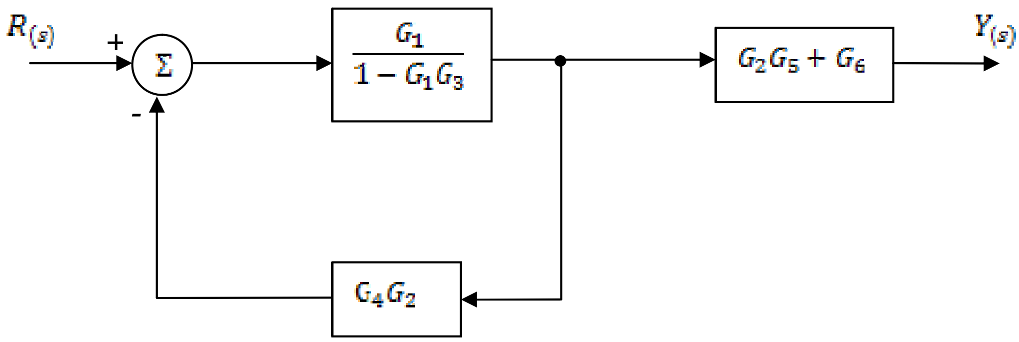


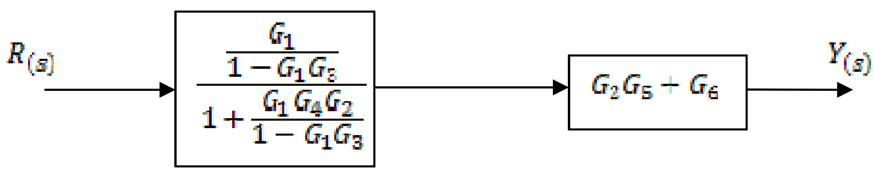
مثال(۱۴-۲): تابع تبدیل شکل زیر کدام است ؟

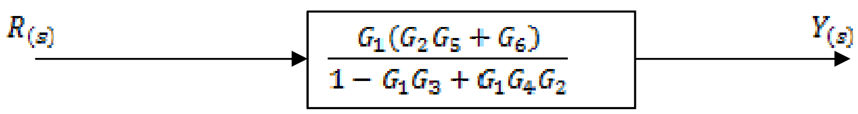


حل:



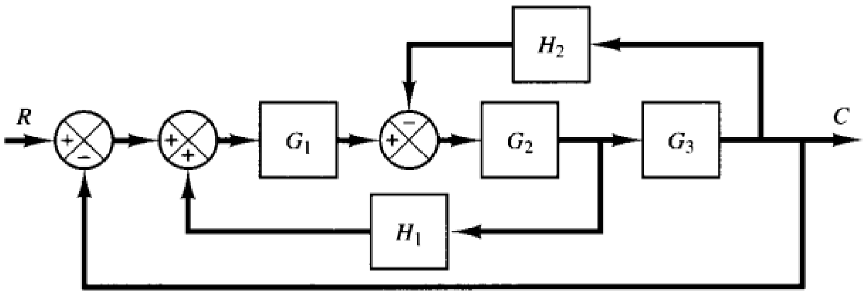


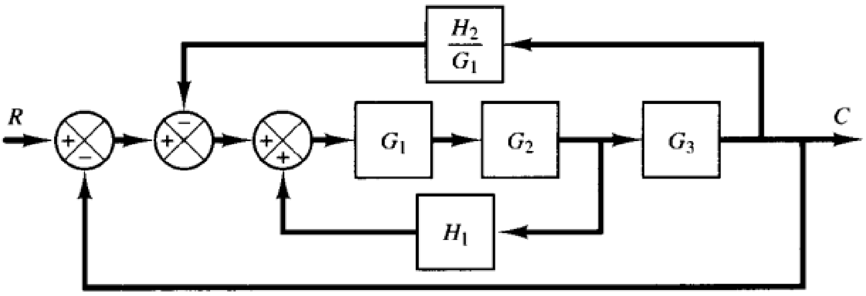


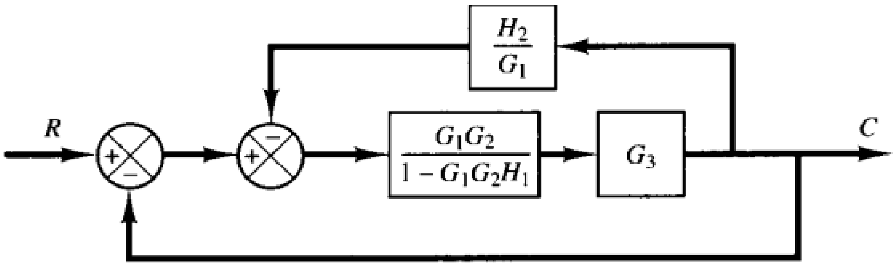


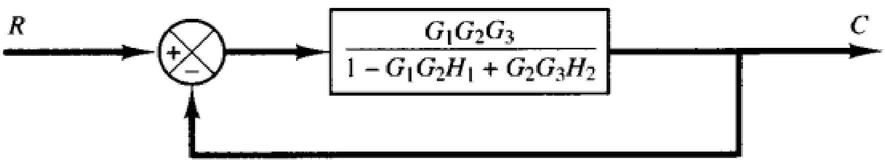
$$T(S)=\frac{Y(S)}{R(S)}=\frac{G_1(G_2G_5+G_6)}{1-G_1G_3+G_1G_4G_2}$$

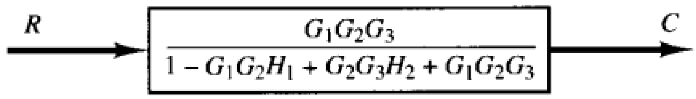
مثال(۱۵-۲) دیاگرام بلوکی زیر را ساده کنید:



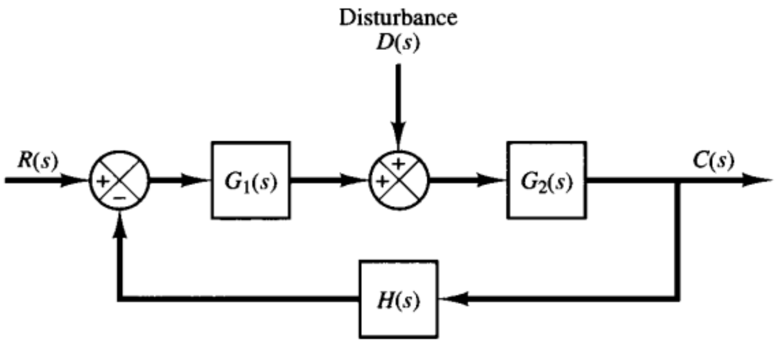








مثال(۱۶-۲) در سیستم زیر تابع تبدیل خروجی نسبت به ورودی و اغتشاش را بدست آورید و سپس خروجی را تعیین کنید.



ملاحظه می شود که سیستم دارای یک خروجی و دو ورودی مرجع $R(S)$ و اغتشاش $D(S)$ است. می دانیم که تابع تبدیل همواره نسبت یک خروجی به یک ورودی است. بنابراین در سیستمهای $MIMO$ باید خروجیهای اضافی را غیر فعال کرد و ورودیهای اضافی را صفر کرد تا تابع تبدیل خروجی به ورودی مورد نظر بدست آید.

در سیستم فوق تابع تبدیل خروجی نسبت به هر یک از ورودیها بصورت زیر بدست می آید:

$$\frac{C_D(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

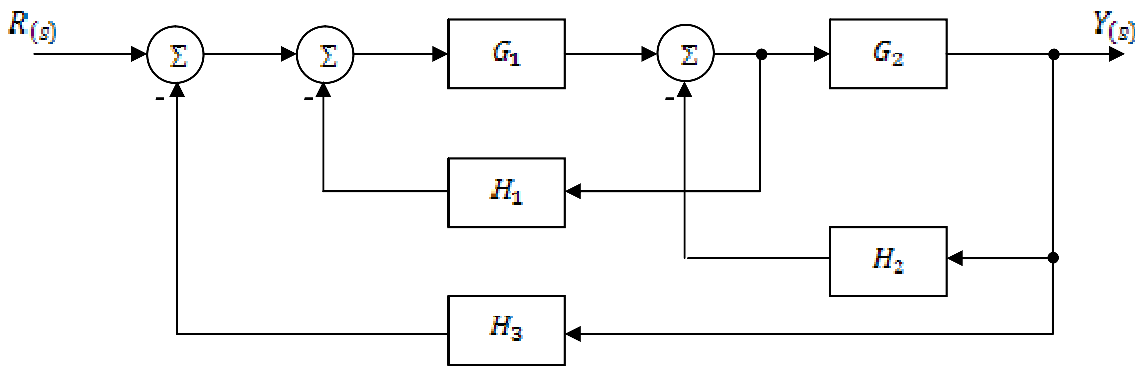
$$\frac{C_R(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

با توجه به اینکه سیستم مورد نظر خطی است پس خروجی از ترکیب دو ورودی بدست می آید:

$$C(s) = C_R(s) + C_D(s) = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}[G_1(s)R(s) + D(s)]$$

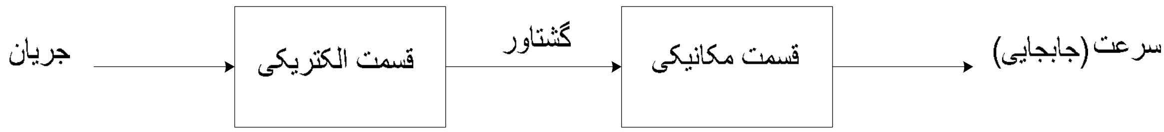
در رابطه بالا دیده می شود که اگر $|G_1(S).H(S)| \gg 1$ باشد آنگاه $|G_1(S).H(S).G_2(S)| \gg 1$ است و اثر اغتشاش به سمت صفر میل می کند. این یکی از مزایای فیدبک است که در سیستمهای حلقه بسته ظاهر می شود.

تمرین (۴-۲): نمودار بلوکی شکل زیر را ساده کرده و تابع تبدیل معادل آنرا بدست آورید.



فرآیندهای الکترومکانیکی:

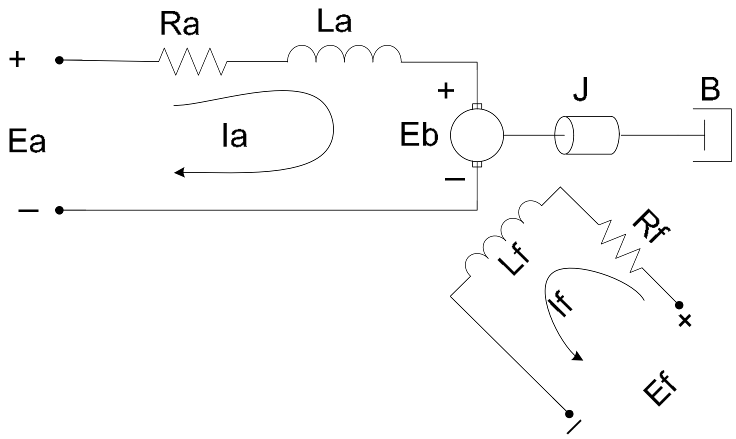
فرآیندهای الکترومکانیکی ترکیبی از دو فرآیند الکتریکی و مکانیکی است. در این پروسه ها ابتدا در بخش الکتریکی، جریان یا ولتاژ تبدیل به گشتاور شده و سپس در بخش مکانیکی گشتاور تبدیل به جابجائی یا سرعت خواهد شد. شکل زیر بخشهای یک سیستم الکترومکانیکی را نشان می دهد.



بدلیل اینکه بیشتر کنترل کننده ها الکتریکی و بیشتر سیستمهائی که با آنها سروکار داریم مکانیکی هستند، یک عملگر الکترومکانیکی مانند موتور DC ضروری است. بعضی از دلائل استفاده موتور DC بعنوان عملگر عبارتند از: قابلیت حمل و نقل آسان، سادگی کنترل سرعت و مشخصه گشتاور - سرعت مناسب.

اکنون به بررسی موتور DC و بدست آوردن تابع تبدیل آن و همچنین مقایسه روشهای کنترل آن خواهیم پرداخت:

موتور DC : موتور DC را در دو حالت مورد بررسی قرار می دهیم. یکی در حالتی که میدان ثابت است و عمل کنترل توسط ولتاژ آرمیچر صورت می گیرد و دیگری زمانی که ولتاژ آرمیچر ثابت است و کنترل توسط میدان انجام می گردد.



$\varphi =$

با توجه به اینکه گشتاور تولیدی موتور هم به جریان آرمیچر و هم به جریان تحریک بستگی دارد، تابع تبدیل موتور را در دو حالت بدست می آوریم:

الف) میدان ثابت است (کنترل توسط آرمیچر انجام می شود):

$I_f =$ ثابت $\Rightarrow \varphi =$ ثابت

گشتاور تولیدی توسط موتور $\Longrightarrow T_e = K.I_a$

1) $E_b = K_2.\varphi.\frac{d\omega}{dt} = K_b.\frac{d\omega}{dt}$

2) $E_a = R_a I_a + L_a.\frac{dI_a}{dt} + E_b$

گشتاور مکانیکی مصرفی $\Longrightarrow T_m = J.\frac{d^2\theta(t)}{d^2t} + B.\frac{d\theta(t)}{dt} = J.\frac{d\omega(t)}{dt} + B.\omega(t)$

در حالت تعادل : گشتاور مصرفی توسط بار = گشتاور تولیدی توسط موتور

3) $T_e = T_m \Rightarrow J.\frac{d^2\theta(t)}{d^2t} + B.\frac{d\theta(t)}{dt} = K.I_a$

معادلات (۱)،(۲)و(۳)را به حوزه لاپلاس می بریم وتابع تبدیل را بدست می آوریم :

$$\frac{\theta(s)}{E_a(S)} = \frac{K}{S[(Ra+SLa)(JS+B)]+K.Kb}$$

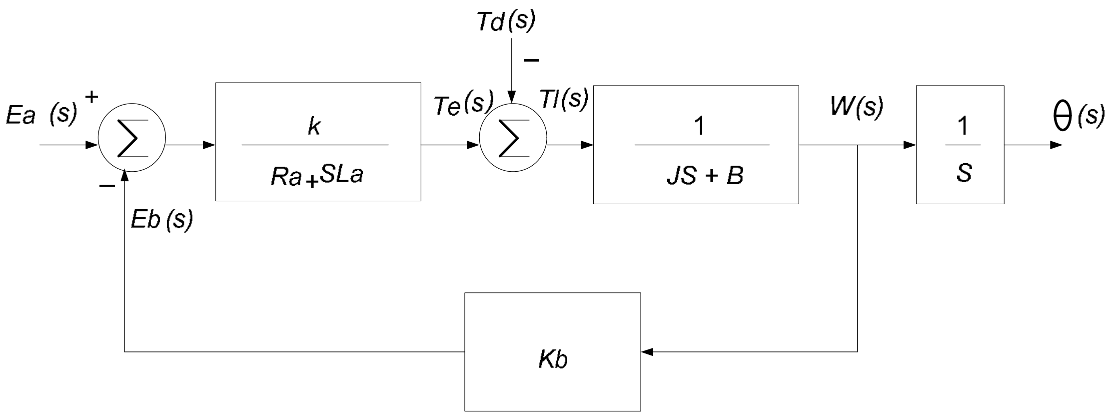
با فرض $L_a = 0$ داریم :

$$\frac{\theta(s)}{E_a(S)} = \frac{Km}{S(\tau m.S+1)}$$

که در آن :

ثابت زمانی موتور $\tau m = \frac{Ra.J}{Ra.B+K.Kb}$, ثابت بهره موتور $Km = \frac{K}{Ra.B+K.Kb}$

دیده می شود که در حالتی که موتور dc توسط جریان آرمیچر کنترل می شود تابع تبدیل موتور با یک سیستم مرتبه دوم معادل است. همچنین با توجه به دیاگرام بلوکی زیر دیده می شود که در این حالت سیستم دارای یک فیدبک داخلی است که باعث می شود عملکرد موتور در کنترل سرعت بهتر باشد. البته چون سیستم مرتبه دوم است در کنترل آن احتمال نوسانی شدن و یا ناپایدار شدن سیستم وجود دارد. از سوی دیگر به واسطه زیاد بودن جریان آرمیچر معمولا تجهیزات مربوط به درایو موتور در این نوع کنترل گرانتر خواهد بود.



ب) جریان آرمیچر ثابت است (کنترل توسط میدان انجام شود): (I_a=const)

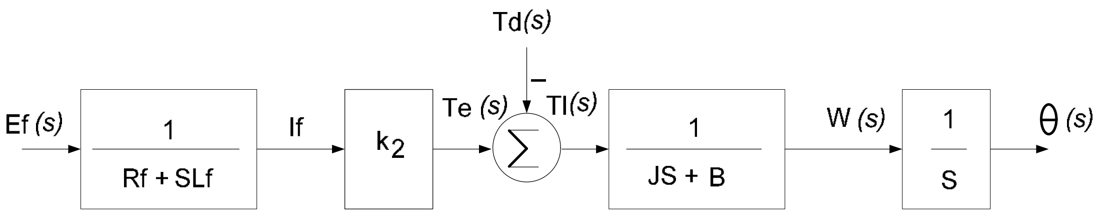
$T=K_2.I_f$, $E_f=R_f.I_f+L_f.\frac{dIf}{dt}$, $J.\frac{d2\boldsymbol{\theta}}{dt2}+B.\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}=K_2.I_f=T$

$(L_f.S+R_f).I_f(S)=E_f(S)$, $(JS^2+BS).\boldsymbol{\theta}(s)=K_2.I_f(S)$

$$\Rightarrow \frac{\boldsymbol{\theta}(s)}{Ef(S)}=\frac{K2}{S[(Rf+SLf)(JS+B)]}=\frac{Km}{S(\boldsymbol{\tau}m.S+1)(\boldsymbol{\tau}f.S+1)}$$

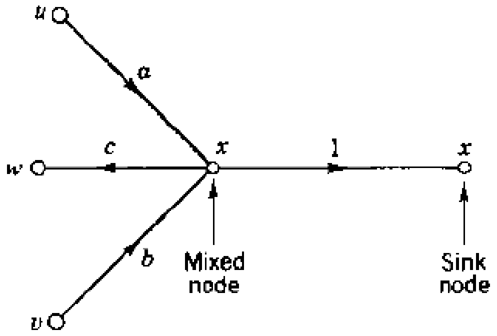
$K_m=\frac{K2}{Rf.B}$ ثابت بهره موتور

$\tau_m=\frac{J}{B}$ ثابت زمانی بار , $\tau_f=\frac{Lf}{Rf}$ ثابت زمانی میدان



نکته : پایداری کنترل دور موتور بوسیله جریان آرمیچر از جریان میدان بیشتر است .

نمودار گذر سیگنال :



تعاریف :

گره : نقطه ای است که یک متغیر یا یک سیگنال را نشان می دهد

انواع گره عبارتند از: گره ورودی یا $Source$ ،گره خروجی یا $Sink$ و گره مخلوط یا $Mixed$.

گره ها دو کار را انجام می دهند. اولا تمام سیگنالهائی که به آنها وارد می شود را با هم جمع می کنند و ثانیا حاصل جمع را به تمام شاخه های خروجی ارسال می کند. در شکل بالا داریم:

$$x = au + bv \text{ و } w = cx = cau + cav$$

شاخه : خطی است که دو گره را به هم وصل می کند .

بهره : بهره حقیقی یا مختلط بین دو گره .

مسیر : راهی است که یک جریان در جهت شاخه های به هم متصل شده طی می کند .

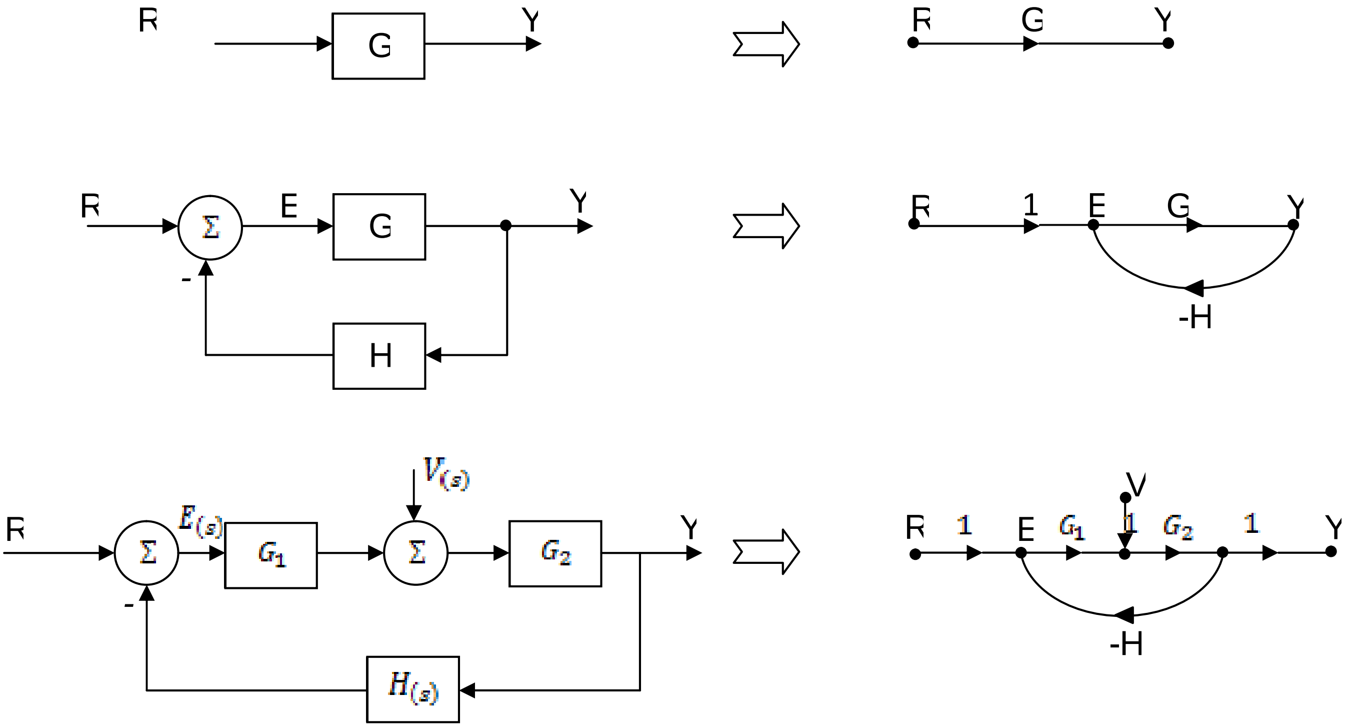
حلقه : یک مسیر بسته را حلقه گویند .

بهره حلقه : حاصل ضرب بهره های شاخه های یک حلقه .

مسیر پیشرو : مسیری است که از گره ورودی به سمت گره خروجی حرکت کند به شرطی که از هرگره فقط یک بار عبور کند .

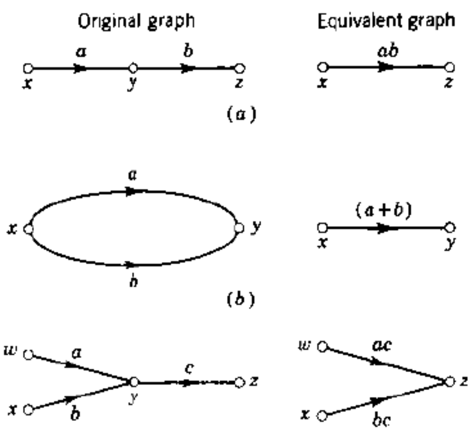
بهره مسیر پیشرو : حاصل ضرب بهره های مسیر پیشرو می باشد .

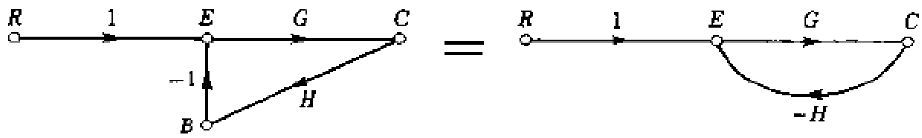
مثال(۱۷-۲): نمودار گذر سیگنال شکلهای زیر را رسم نمایید .

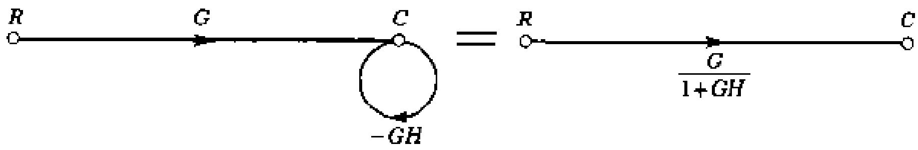


تذکر :

در شکل زیر چند معادل در ساده سازی نمودار گذر سیگنال دیده می شود:







قاعده میسون : اگر یک سیستم را بصورت نمودار گذر سیگنال نمایش دهیم می توانیم تابع تبدیل معادل آنرا با استفاده از فرمول بهره میسون که بصورت زیر تعریف می شود بدست آورد.

$$G_{(s)} = \frac{Y_{(s)}}{R_{(s)}} = \frac{1}{\Delta} \sum_{i} P_i * \Delta_i$$

i: تعداد مسیرهای پیشرو

p_i: بهره مسیر پیشرو i ام

Δ: دترمینان سیستم که به صورت زیر محاسبه می شود :

*Δ=1-(*مجموع بهره کلیه حلقه های تکی*)+*

*-(*مجموع حاصل ضرب بهره های هر دو حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند*)*

+*(* مجموع حاصل ضرب بهره های هر سه حلقه ای که با هم گره مشترک ندارند*)*

.........-*(* مجموع حاصل ضرب بهره های هر چهارحلقه ای که با هم گره مشترک ندارند*)*

Δ_i: دترمینان مسیر پیشرو i ام که به صورت زیر محاسبه می شود :

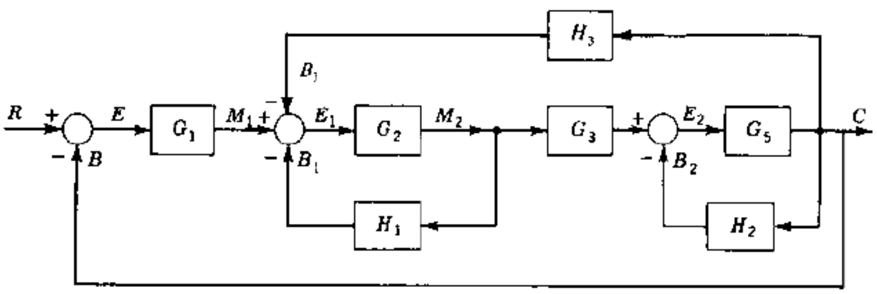
$\Delta_i=1-$(مجموع بهره کلیه تک حلقه هایی که با مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند)+

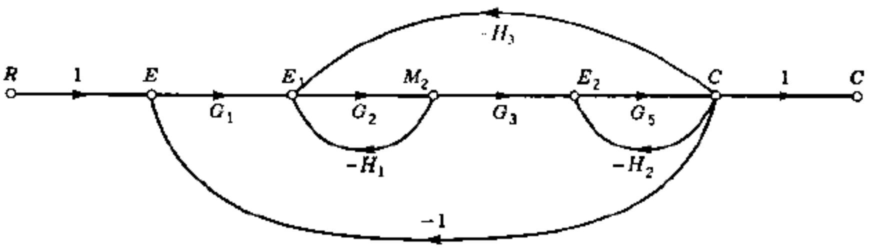
(مجموع حاصل ضرب بهره های دوحلقه هایی که با همدیگروبا مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند) −

(مجموع حاصل ضرب بهره های سه حلقه هایی که با همدیگروبا مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند)+

(مجموع حاصل ضرب بهره های چهارحلقه هایی که با همدیگروبا مسیر پیش رو i ام گره مشترک ندارند)-.........

مثال(۱۸-۲) دیاگرام بلوکی شکل زیر را بصورت نمودار گذر سیگنال نمایش داده و سپس با استفاده از فرمول بهره میسون تابع تبدیل کلی سیستم را بدست آورید:





تعیین مسیرهای پیشرو :

$$P_1 = G_1G_2G_3G_5$$

- حلقه های تکی :

$$L_1 = -G_2H_1 \quad , \quad L_2 = -G_5H_2 \quad , \quad L_3 = -G_2G_3G_5H_3 \quad , \quad L_4 = -G_1G_2G_3G_5$$

- حلقه های دو تایی :

$$(L_1, L_2)$$

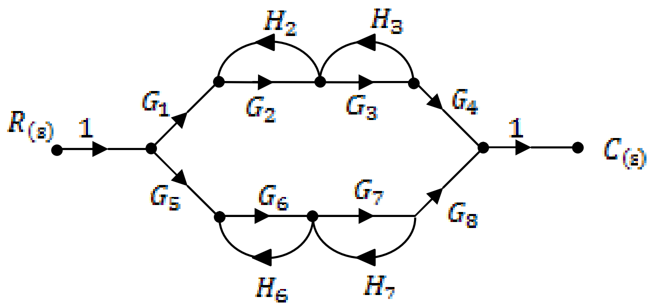
- حلقه های سه تایی : نداریم.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1, L_2)$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$T(s) = \frac{P_1 \Delta_1}{\Delta} = \frac{G_1 G_2 G_3 G_5}{(-G_2 H_1 - G_5 H_2 - G_2 G_3 G_5 H_3 - G_2 G_3 G_5 + G_2 H_1 G_5 H_2)}$$

مثال(۱۹-۲): تابع تبدیل سیستم زیر را بدست آورید .



حل :

- تعیین مسیرهای پیشرو :

$$P_1 = G_1 G_2 G_3 G_4 \quad , \qquad P_2 = G_5 G_6 G_7 G_8$$

- حلقه های تکی :

$$L_1 = G_2 H_2 \quad , \quad L_2 = G_3 H_3 \quad , \quad L_3 = G_6 H_6 \quad , \quad L_4 = G_7 H_7$$

- حلقه های دو تایی :

$$(L_1, L_3) \;,\; (L_1, L_4) \;,\; (L_2, L_3) \quad , \quad (L_2, L_4)$$

- حلقه های سه تایی : نداریم.

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1, L_3 + L_1, L_4 + L_2, L_3 + L_2, L_4)$$

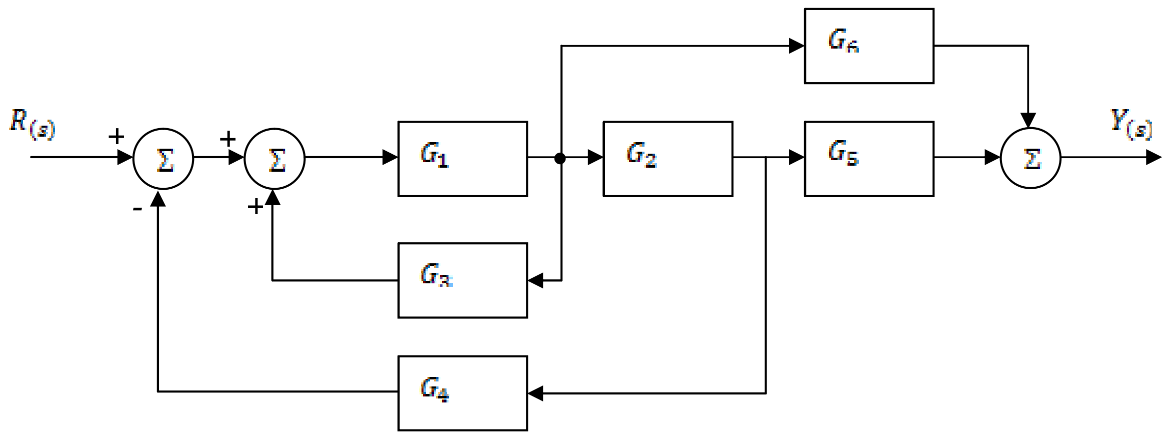
$$\Delta_1 = 1 - (L_3 + L_4)$$

$$\Delta_1 = \Delta|_{L_1, L_3 = 0} = 1 - (L_3 + L_4)$$

$$\Delta_2 = 1 - (L_1 + L_2)$$

$$\Delta_1 = \Delta|_{L_3, L_4 = 0} = 1 - (L_1 + L_2)$$

- **نکته :** دترمینان یک سیستم (Δ) بستگی به ساختارداخلی آن سیستم دارد و هیچ گونه ارتباطی با محل انتخاب ورودی ها و خروجی ها ندارد به طور کلی $\Delta = 0$ که مخرج تابع تبدیل است معادله ای را تشکیل می دهد به نام معادله مشخصه که ریشه های آن برای ما ساختار سیستم را مشخص می کند ، این ریشه ها که قطب های سیستم نامیده می شوند فرم کلی پاسخ را ارائه می دهند .
- **تمرین(۶-۲):** نمودار گذر سیگنال شکل زیر را رسم نموده و با استفاده از قائده میسون آن را ساده نمایید :



فصل سوم

مدل های متغییر حالت برای سیستمهای فیزیکی

در فصل قبل مدلهای ریاضی سیستمهای کنترلی را بررسی کردیم. در این فصل ضمن یادآوری تعریف حالت و متغییر های حالت به بررسی سیستمها در این قالب خواهیم پرداخت. و در نهایت تبدیل مدلهای مختلف به هم را بررسی می کنیم.

نمایش سیستمها بصورت فضای حالت یا *state-space*

۱- اطلاعات بیشتری از داخل سیستم به ما می دهد یعنی می توانیم متغیر های داخلی را مشاهده کنیم.

۲- برای نمایش تمام سیستم ها استفاده میشود.سیستم های خطی ، غیر خطی ،TI، TV.

۳- برای شبیه سازی سیستم ها به صورت کامپیوتری بهتر است. (چون این معادلات در حوزه زمان نوشته می شوند).

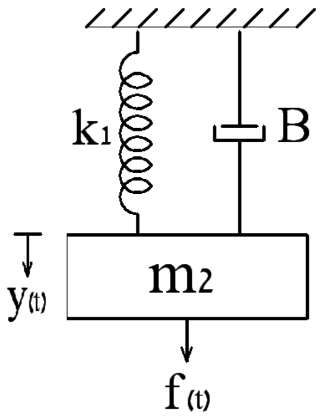
۴- پایه ی تئوری کنترل مدرن است.

حالت سیستم: حالت یک سیستم وضعیت آن است در گذشته ،حال و آینده. در فضای حالت معادلات دینامیکی سیستم با استفاده از دو مجموعه ی **متغیرهای حالت** و **معادلات حالت** تعریف می شوند.

متغیرهای حالت : متغیرهای حالت یک سیستم مجموعه ای مینیمال از متغیر ها مانند $x1(t)$ ، $x2(t)$... $xn(t)$ است به طوری که دانستن آنها در لحظه ای چون t_0 و داشتن اطلاعات از محرک ورودی که پس از t_0 اعمال می شود برای تعیین حالت سیستم در هر لحظه $t>t_0$ کافی باشد.

معادلات حالت: معادلات حالت یک سیستم معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی هستند که تعداد آنها به درجه معادلات دیفرانسیل دینامیکی سیستم وابسته است.

مثال (۱-۳): برای سیستم دینامیکی جرم فنر و دمپر زیر معادلات حالت را تعیین کنید.



$$\frac{md^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=f(t)$$

$$\begin{cases} x_1=y(t) \\ x_2=\dfrac{dy(t)}{dt}=\dfrac{dx}{dt}=\dot{x}_1 \end{cases}$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt}=\frac{f(t)}{m}-\frac{B}{m}\frac{dy(t)}{dt}-\frac{k}{m}y(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_2=\dfrac{-B}{m}.x_2-\dfrac{k}{m}.x_1+\dfrac{f(t)}{m} \\ \dot{x}_1=x_2 \end{cases}$$

فرم کلی نمایش متغیرهای حالت:

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x,u) \\ y=h(x,u) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=A.x+B.u \\ y=C.x+D.u \end{cases}$$

که در آن x ماتریس $(n*1)$ متغیر های حالت سیستم، A یک ماتریس $n*n$ ، ماتریس سیستم است. n تعداد معادلات حالت یا متغیرهای سیستم است. B یک ماتریس $n*1$ ، ماتریس ورودی است، C یک ماتریس $1*n$ ، ماتریس خروجی است و D یک ماتریس $1*1$ ، ماتریس کوپلینگ مستقیم ورودی و خروجی است.

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$$

نمایش ماتریسی مثال قبل :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{B}{m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{m}\end{bmatrix}.f(t)$$

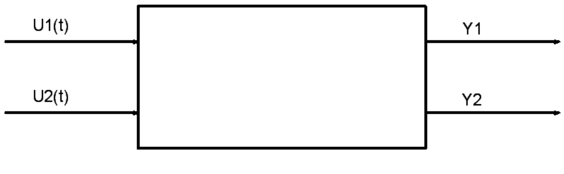
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+[0].f(t)$$

تذکر: در حالت کلی تر برای یک سیستم با n متغیر حالت ، mورودی و p خروجی ابعاد ماتریس ها به صورت زیر است:

A یک ماتریس $n*n$ ، B یک ماتریس $n*m$ هستند. دو ماتریس A و B کنترل پذیری *(Controllability)* یک سیستم را برای ما نشان می دهند. کنترل پذیری به این مفهوم است که می توان سیستم را بگونه ای طراحی کرد که خواسته های مسئله برآورده شود.

C یک ماتریس $p*n$ ، است که اثر متغییرهای حالت را بر خروجی نشان می دهد. این ماتریس مشاهده پذیری *(Observability)* را در سیستم تعیین می کند. مشاهده پذیری به این مفهوم است که ما بتوانیم توسط مشاهده یا اندازه گیری خروجیها و ورودیها اطلاعاتی در باره متغییرهای حالت سیستم بدست آوریم. اگر این امکان وجود داشته باشد سیستم مشاهده پذیر است که این خاصیت توسط ماتریس C قابل تشخیص است. و D یک ماتریس $p*m$ است.

مثال(۲-۳): برای سیستم زیر معادلات دینامیکی سیستم داده شده است ، معادلات حالت آن را به دست آورید.



$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + k_1\dot{y}_1 + k_2 y_1 = u_1 + u_2 k_3 \\ \dot{y}_2 + k_4 y_2 + k_5 \dot{y}_1 = k_0 u_1 \end{cases}$$

حل: تعداد متغیرهای حالت را با توجه به تعداد خروجی ها و درجه معادله دینامیک هر خروجی به دست می آوریم. معادله دینامیک y_1 درجه ۲ است پس حداقل دو متغییر برای آن و y_2 درجه ۱ است پس حداقل یک متغییر نیاز است در نتیجه معادلات حالت دارای سه متغییر و سه معادله خواهند بود. پس از تعیین متغییر های حالت معادلات دیفرانسیل سیستم را برای بالاترین مرتبه مشتق حل می کنیم و سپس معادلات حالت را تشکیل می هیم. باید توجه داشت که برای دستیابی به معادلات حالت باید در سمت راست هر معادله مشتق یک متغیر حالت وجود داشته باشد و سمت چپ آن معادلات برحسب خود مغییر های حالت و ورودیها باز نویسی شود.

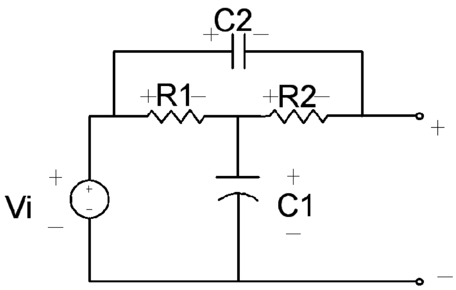
$$\begin{matrix} y_1 = x_1 \\ \dot{y}_1 = x_2 \\ y_2 = x_3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} \ddot{y}_1 = -k_1\dot{y}_1 - k_2 y_1 + u_1 + k_3 u_2 \\ \dot{y}_2 = -k_4 y_2 - k_5 \dot{y}_1 + k_0 u_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -k_1 x_2 - k_2 x_1 + u_1 + k_3 u_2 \\ \dot{x}_3 = -k_4 x_3 - k_5 x_2 + k_0 u_1 \end{cases}$$

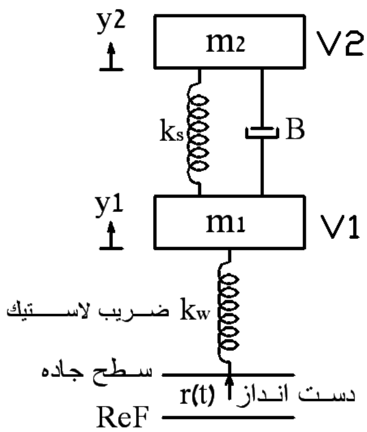
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -k_2 & -k_1 & 0 \\ 0 & -k_5 & -k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & k_3 \\ k_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

تمرین (۱-۳) : معادلات حالت را برای مدار زیر به دست آورید.



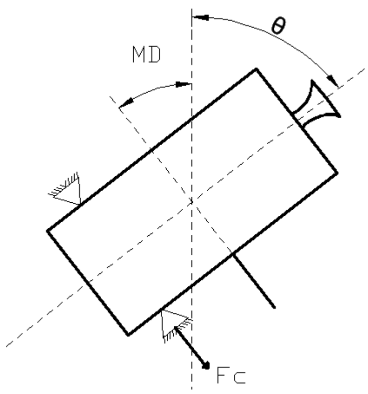
تمرین (۲-۳) : معادلات حالت سیستم دینامیکی سیستم زیر را نوشته و فضای حالت آن را رسم کنید.



ورودی : $r(t)$

خروجی ها : $y1,y2$

مثال(۳-۳): معادلات دینامیکی را برای جرم فضایی مقابل به دست آورید.



$\alpha(rad/s^2)$: شتاب زاویه ای

F_C : نیروی موتور جت

$I(kgm^2)$: ممان اینرسی

MD : گشتاور حاصل از نیرو های خارجی

θ موقعیت زاویه ای جرم فضائی که خروجی سیستم است

و d فاصله محور موتور های جت از مرکز ثقل جرم فضائی.

حل:

$$\sum T = I.\alpha$$

$$\Rightarrow F_c.d - MD = I.\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2} = I.\ddot{\theta}$$

$$\Rightarrow F_c.d - MD = I.\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = F_c\frac{d}{I} - \frac{MD}{I}$$

$$\begin{cases} x_1 = \theta \\ x_2 = \dot{\theta} = \dot{x}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = F_c.\frac{d}{I} - \frac{MD}{I} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{d}{I} & -\frac{1}{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_c \\ MD \end{bmatrix}$$

$$\theta = y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_c \\ MD \end{bmatrix}$$

حل معادلات حالت و ماتریس انتقال (گذار) حالت *(State Transition Matrix)*:

معادلات حالت $\longrightarrow$ $\dot{X} = AX + BU$

$\overset{L}{\Rightarrow}$ *SX(S)-X(0)=AX(S)+BU(S)* $\Longrightarrow$ *(SI-A).X(S)=X(0)+BU(S)*

$(SI-A)^{-1}(SI-A).X(S)= (SI-A)^{-1}[X(0)+BU(S)]$

$\Longrightarrow$ *$X(S)= (SI-A)^{-1}[X(0)+BU(S)]$*

تعریف ماتریس انتقال حالت :

ماتریس $(SI-A)^{-1}$ را با $\varphi(S)$ نمایش می دهیم. با لاپلاس معکوس گیری ماتریس □(t) را خواهیم داشت که به آن ماتریس انتقال حالت یا گذار حالت می گوئیم. این ماتریس رفتار سیستم را مشخص می کند و همانطور که دیده می شود فقط به ماتریس A بستگی دارد.

$$\varphi(S)= (SI-A)^{-1}$$

$$\varphi(t)=L^{-1}\{\square(s)\} =L^{-1}\{(SI-A)^{-1}\}$$

راهی دیگر برای بدست آوردن $\varphi(t)$:

طبق تعریف □(t) یا ماتریس انتقال حالت باید در معادله همگن حالت صدق کند ، پس :

$$\frac{dX(t)}{dt} = A.X \Longrightarrow \frac{d\varphi(t)}{dt}= A.\ \varphi(t) \Longrightarrow \varphi(t)=e^{At}$$

پس از بدست آوردن $\varphi(t)$ داریم :

$$X(S)= \varphi(S).\ X(0) + \varphi(S).\ B.U(S)$$

$$L^{-1} \Longrightarrow \underbrace{X(t)}_{\text{پاسخ کامل}} = \underbrace{\varphi(t).\ X(0)}_{\text{پاسخ ورودی صفر}} + \underbrace{\int_0^t \varphi(t-\tau).B.U(\tau)d\tau}_{\text{پاسخ حالت صفر}}$$

مشاهده می شود که با داشتن ماتریس انتقال حالت و شرایط اولیه می توان هر حالت دیگری را در سیستم بدست آورد. بعبارت دیگر ماتریس انتقال حالت هر حالت اولیه از سیستم را به حالت کنونی انتقال می دهد.

مثال(۴-۳): ماتریس انتقال حالت رابرای سیستم زیر بدست آورید .

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حل :

$$(SI-A)=\begin{bmatrix} S+3 & -1 \\ 2 & S \end{bmatrix} \Longrightarrow |(SI-A)| = S(S+3)+2 = S^2+3S+2$$

$$adj(SI-A) = \begin{bmatrix} S & 1 \\ -2 & S+3 \end{bmatrix} \Longrightarrow (SI-A)^{-1} = \frac{1}{S2+3S+2}\begin{bmatrix} S & 1 \\ -2 & S+3 \end{bmatrix}$$

$$\varphi(S) = (SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+2)(s+1)} & \frac{1}{(s+2)(s+1)} \\ \frac{-2}{(s+2)(s+1)} & \frac{s+3}{(s+2)(s+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{(s+2)} - \frac{1}{(s+1)} & \frac{-1}{(s+2)} + \frac{1}{(s+1)} \\ \frac{2}{(s+2)} - \frac{2}{(s+1)} & \frac{-1}{(s+2)} + \frac{2}{(s+1)} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \varphi(t) = L^{-1}\{\Box(s)\} = L^{-1}\{(SI-A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} - e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ 2e^{-2t} - 2e^{-t} & -e^{-2t} + 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

مثال(۵-۳): ماتریس انتقال حالت و معادله انتقال حالت را برای سیستم زیر بدست آورید.

$$X' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} X \quad , \quad X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حل : چون سیستم ورودی ندارد ، $X(t)$ فقط شامل پاسخ ورودی صفر میباشد.

$$X(t) = \varphi(t).X(0)$$

$$\varphi(t) = L^{-1}\{\Box(s)\} = L^{-1}\{(SI-A)^{-1}\}$$

$$(SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} S+2 & -1 \\ 0 & S+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{S2+3S+2}\begin{bmatrix} S+3 & 1 \\ 0 & S+2 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow (SI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \frac{1}{(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\varphi(t) = L^{-1}\{\Box(s)\} = L^{-1}\{(SI-A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X1(t) \\ X2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - e^{-3t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix}$$

مثال(۶-۳) : معادله انتقال حالت $X(t)$ را با فرض ورودی پله $U(t)$ برای مثال قبل بدست آورید .

$$X(0) = \begin{bmatrix} X1(0) \\ X2(0) \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حل :

$$X(t) = \varphi(t).X(0) + \int_0^t \varphi(t-\tau).B.U(\tau).d\tau$$

$$X(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} X1(0) \\ X2(0) \end{bmatrix}+$$

$$\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)} & e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)} \\ 0 & e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.U(\tau).d\tau$$

$$X(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} X1(0) \\ X2(0) \end{bmatrix}+\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-2(t-\tau)}-e^{-3(t-\tau)} \\ e^{-3(t-\tau)} \end{bmatrix}.d\tau$$

$$X(t)=\begin{bmatrix} e^{-2t}.x_1(0)+(e^{-2t}-e^{-3t}).x_2(0) \\ e^{-3t}x_2(0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{1}{2}-\frac{1}{3}-[\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{3}e^{-3t}] \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

تمرین(۳-۳) : با فرض ورودی پله معادله انتقال حالت را بدست آورید و در $t=1S$ خروجی $y(t)$ را محاسبه کنید .

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C=[1 \quad 0] \quad , \quad X(0)=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

دستیابی به تابع تبدیل از معادلات حالت:

فرم کلی معادلات حالت بصورت ماتریسی بصورت زیر است:

$$\begin{Bmatrix} x' = AX+BU \\ y = CX+DU \end{Bmatrix} \Rightarrow \ell \begin{Bmatrix} SX(s)=AX(s)+BU(s) \\ y(s)=CX(s)+DU(s) \end{Bmatrix}$$

$$(SI-A)X(s)=BU(s)$$

که با فرض شرایط اولیه صفر داریم:

$$X(s)=(SI-A)^{-1}\cdot BU(S)$$

$$Y(S)=C\cdot(SI-A)^{-1}\cdot BU(s)+DU(s)\Rightarrow\frac{Y(s)}{U(s)}=G(S)=C\cdot(SI-A)^{-1}\cdot B+D$$

بنابراین می توانیم با استفاده از معادلات حالت تابع تبدیل را برای یک سیستم بدست آوریم.

ارتباط بین معادلات فضای حالت و تابع تبدیل:

در تابع تبدیل:

$$G(S)=\frac{a(S)}{b(S)}\Rightarrow b(S)=0\Rightarrow$$ معادله مشخصه

$$b(S)=(S-S_i)=0$$

که در آن S_i قطبهای حقیقی یا مختلط تابع تبدیل است.

درفضای حالت:

$$G(s)=c\cdot\frac{adj(SI-A)}{|SI-A|}\cdot B+D$$

معادله مشخصه در حالت فوق همچنان مخرج تابع تبدیل خواهد بود:

$$|SI-A|=0$$

با حل معادله بالا که معادله مشخصه سیستم هست مقادیر ویژه ماتریس A بدست می آید پس نتیجه می شود:

قطبهای تابع تبدیل، زیر مجموعه ای از مقادیر ویژه ماتریس A است.

مثال(۷-۳): در سیستم زیر مطلوب است محاسبه قطبهای تابع تبدیل و مقادیر ویژه ماتریس A.

$$x'=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-6&-11&-6\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}x$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}x$$

$$(SI - A) = \begin{bmatrix} S & -1 & 0 \\ 0 & S & -1 \\ 6 & 11 & S+6 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|SI - A| = 0 \Rightarrow S^3 + 6S^2 + 11S + 6 = (S+1)(S+2)(S+3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1 = -1 \\ S_2 = -2 \Rightarrow \\ S_3 = -3 \end{cases}$$

مقادیر ویژه ماتریسA

برای بدست آوردن تابع تبدیل

$$G(s) = c \cdot (AS - I)^{-1} \cdot B + D$$

$$adj(SI - A) = \begin{bmatrix} S^2 + 6S + 11 & S+6 & 1 \\ -6 & S^2 \_ 6S & S \\ -6S & -11S - 6 & S^2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s^2 + 6s + 11 & s+6 & 1 \\ -6 & s^2 - 6s & s \\ -6s & -11s - 6 & s^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ 1\end{bmatrix} \right) \times \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} \Rightarrow$$

$$G(s) = \left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1 \\ s \\ s^2\end{bmatrix} \right) \times \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1+s}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} s_1 = -2 \\ s_2 = -3 \end{cases}$$

نمودار حالت**SD (State-Diagram)**:

نمودارحالت شکل تعمیم یافته ای از نمودار گذر سیگنال برای نمایش معادلات حالت ومعادلات دیفرانسیل یک سیستم است.

مزایای نمودار حالت:

۱- مستقیماً توسط معادله دیفرانسیل سیستم قابل رسم است.

۲- تابع تبدیل را می توان از نمودار حالت بدست آورد.

۳- معادله های حالت ومعادله های خروجی را میتوان از نمودار حالت بدست آورد.

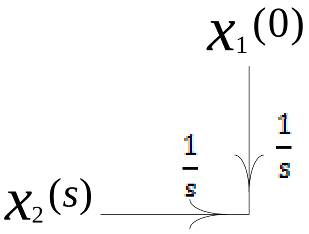
۴- نمودار حالت را می توان از تابع تبدیل بدست آورد.

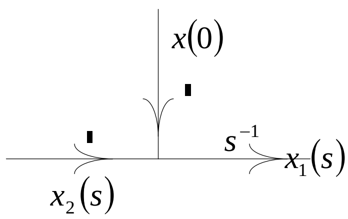
۵- تمام قواعد نمودار گذر سیگنال در مورد آن صدق میکند.

فرض کنیم x_1 و x_2 متغیرهای حالت برای یک سیستم باشند و داشته باشیم

$$x_1' = x_2$$

$$x_1' = \frac{dx_1}{dt} = x_2 \Rightarrow \ell \Rightarrow Sx_1(s) = x_2(s) + x_1(0) \Rightarrow x_1(s) = \frac{x_2(s) + x_1(0)}{S}$$





تبدیل معادله دیفرانسیل به نمودار حالت:

مثال(۸-۳): معادله دیفرانسیل سیستمی به طور زیر است نمودار حالت را برای سیستم فوق رسم کنید.

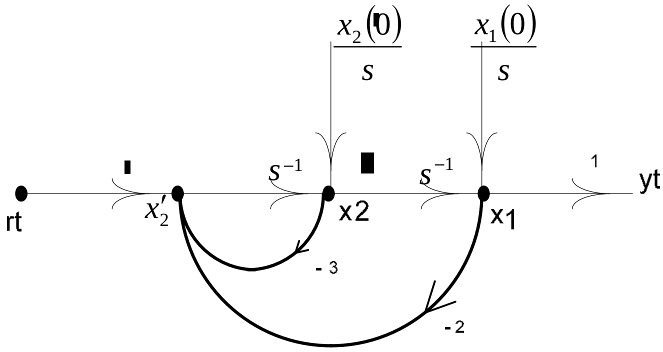
ابتدا معادله دیفرانسیل را بر حسب بالاترین مرتبه مشتق حل می کنیم. سپس متغییرهای حالت را تعریف کرده و با آنها معادله را بازنویسی می کنیم.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+3\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=r(t)$$

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=-3\frac{dy(t)}{dt}-2y(t)+r(t)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1=y(t) \\ x_2=\dfrac{dy(t)}{dt}=\dot{x}_1 \end{cases}$$

متغییرهای حالت را بعنوان گره قرار می دهیم و ارتباط بین آنها را مانند دیاگرام بالا برقرار می کنیم. اولین گره سمت راست را گره خروجی فرض کرده و ارتباط بین آن و متغییر های حالت را برقرار می کنیم.

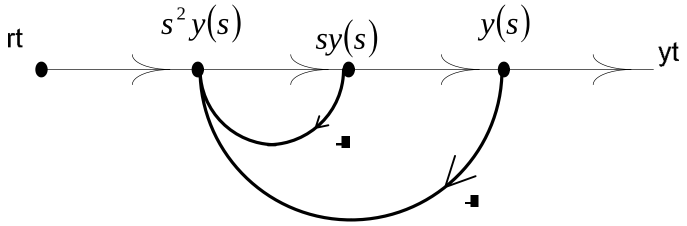


تبدیل نمودار حالت به تابع تبدیل:

برای این کار کافی است مقادیر اولیه را در نمودار حالت حذف کنیم و با استفاده از فرمول بهره میسون نسبت

$G(s)=\dfrac{y(s)}{R(s)}$ را بدست بیاوریم

$$\frac{y(s)}{R(s)}=\frac{pi\Delta i}{\Delta}=\frac{s^{-2}\times 1}{1-\left(-3s^{-1}-2s^{-2}\right)}=\frac{1}{s^2+3s+2}$$



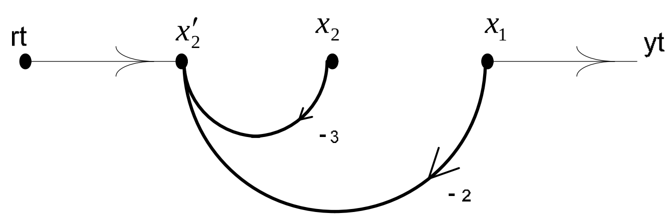
تبدیل نمودارحالت به معادلات حالت:

۱- شرایط اولیه و شاخه های انتگرال گیر با بهره s^{-1} را حذف میکنیم.

۲- گره هائی را که مشتق های متغییرهای حالت را نشان میدهد به عنوان گره خروجی درنظر می گیریم .

۳- متغییرهای حالت و ورودی ها را به عنوان متغییرهای ورودی در نمودار حالت در نظر می گیریم.

۴- با استفاده از فرمول بهره میسون حاصل تک تک خروجی ها(مشتق متغییرهای حالت) را بدست می آوریم.



$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = -3x_2 - 2x_1 + rt$$

فصل چهارم

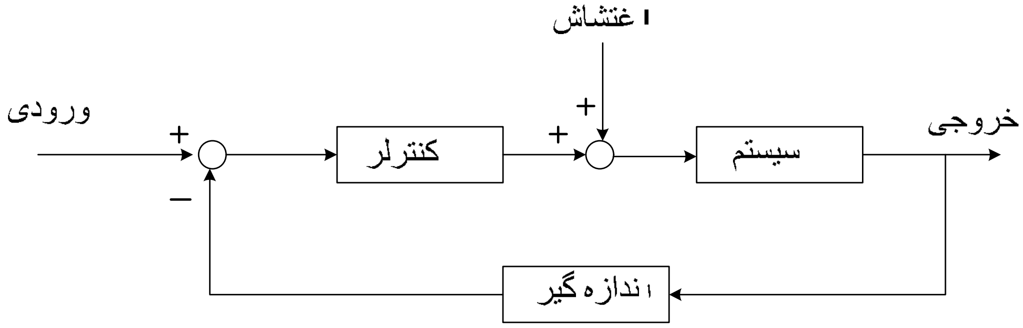
مشخصات سیستم کنترل پسخوردی

همانطور که در مباحث قبلی بررسی شده است، سیستمهای کنترلی به دو شکل حلقه باز و حلقه بسته مورد استفاده قرار می گیرند. در بخش اول مقایشه این دو سیستم را بطور کلی دیدیم. در این قسمت می خواهیم مزایا و خصوصیات یک سیستم کنترلی حلقه بسته را دقیقتر مورد مطالعه قرار دهیم. بطور کلی خصوصیات اصلی فیدبک عبارتند برای یک سیستم حلقه بسته نمونه مانند شکل زیر عبارتند از:

۱-کاهش اثر اغتشاش

۲- کاهش حساسیت سیستم به تغییرات بهره

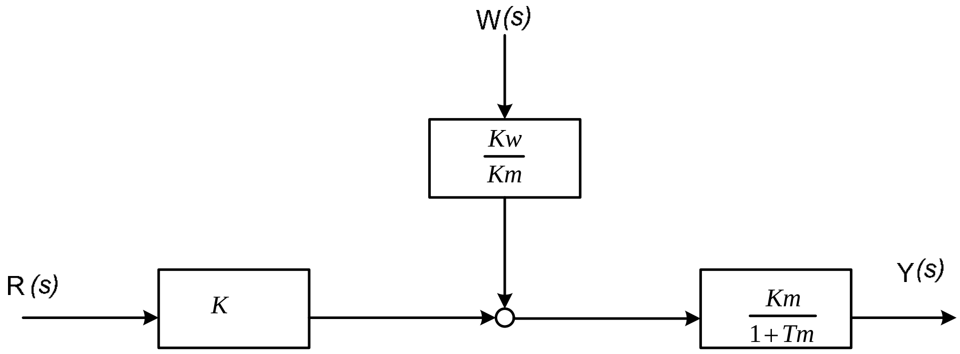
۳- بهبود پاسخ گذرا



۱- کاهش اثر اغتشاش:

مثال۱-۴) بررسی اثرات فیدبک روی کنترل سرعت موتور جریان مستقیم با فرض اینکه $L_a \cong 0$:

الف) سیستم حلقه باز: با کنترل جریان آرمیچر



$$G(s) = \frac{K_m}{1+T_m.S}$$

$$K_m = \frac{\acute{K}}{R_a.B+K_b.\acute{K}}$$

$$Tm = \frac{R_a.J}{R_a.B+\acute{K}.K_b}$$

خروجی سیستم در حالت حلقه باز با استفاده از جمع آثار بصورت زیر است:

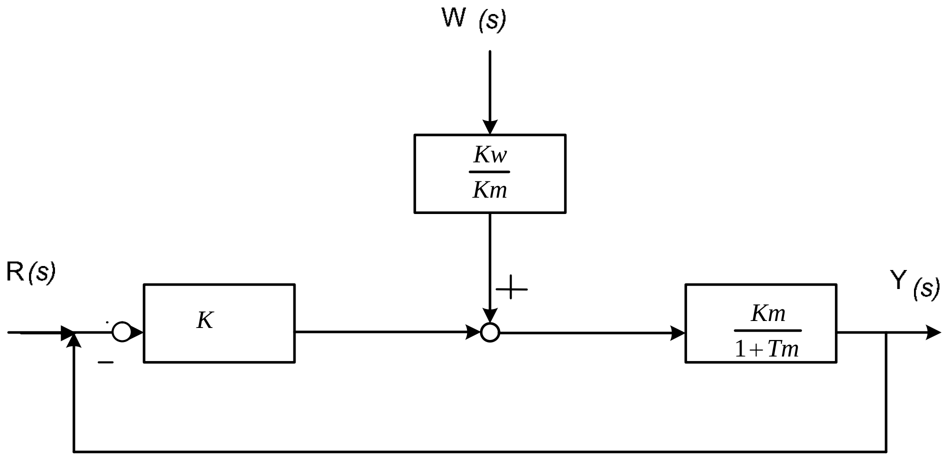
$$Y(s) = \frac{K.K_m}{1+T_m.S}.R(s) + \frac{K_w}{1+T_m.S}.W(s)$$

با فرض اینکه ورودی r و اغتشاش w (تغییر بارروی شفت موتور) ثابت باشند داریم:

$$R(s) = \frac{r}{s} \qquad\qquad W(s) = \frac{W}{S}$$

$$y_{olss}(t) = lim_{s\to 0}\, sY(s) = K.K_m.r + K_w.W$$

ب) سیستم حلقه بسته : با کنترل جریان آرمیچر



$$\frac{k.k_m}{1+k.k_m+T_m.s}R(s)+\frac{k_w}{1+k.k_m+T_m.s}W(s)$$

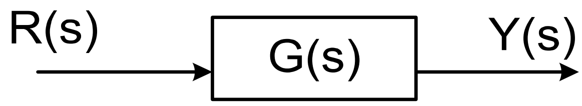
$$\Rightarrow\ y_{clss}=lim_{s\to 0}\,SY(s)=\frac{K.K_m}{1+K.K_m}.r+\frac{K_w}{1+K.K_m}.w$$

با مقایسه خروجی در حالت مانا در دو سیستم فوق مشاهده می شود که تاثیر اغتشاش روی سیستم حلقه بسته در حالت مانا با ضریب $\Rightarrow\ y_{clss}=\frac{1}{1+K.K_m}$ کاهش می یابد که برای سیستم کنترلی مزیت زیادی محسوب می شود.

۲- کاهش حساسیت سیستم به تغییرات بهره:

تعریف: حساسیت سیستم نسبت تغییر تابع تبدیل سیستم به تغییر تابع تبدیل فرآیند (یا تغییر یک پارامتر فرآیند) در ازائ یک تغییر افزایشی کوچک است. حساسیت یک تابع به پارامترα با فرض کوچک بودن تغییرات بصورت زیر تعریف می شود:

مثال۲-۴) برای یک سیستم حلقه باز، حساسیت سیستم را نسبت به تغییرات تابع تبدیل بدست آورید.



$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = G(s) \quad \Longrightarrow \quad S_{G(s)}^{T(s)} = \frac{G(s)}{T(s)} \times \frac{\partial T(s)}{\partial G(s)} = 1$$

مثال۳-۴) برای یک سیستم حلقه بسته، حساسیت سیستم را نسبت به تغییرات تابع تبدیل بدست آورید.

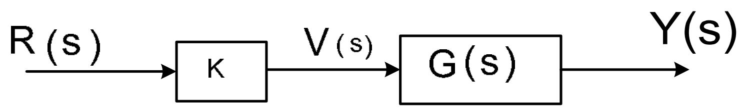
$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s).H(s)}$$

$$S_{G(s)}^{T(s)} = \frac{G(s)}{T(s)} \times \frac{\partial T(s)}{\partial G(S)} = \frac{1+G(s).H(s)-G(s).H(s)}{[1+G(s).H(s)]^2} = \frac{G(s)}{\frac{G(s)}{1+G(s).H(s)}} \times \frac{1}{[1+G(s).H(s)]^2} = \frac{1}{1+G(s).H(s)}$$

۳- بهبود پاسخ گذرا:

مثال۴-۴) درموتور جریان مستقیم با تحریک آرمیچر و فرض $La = 0$ پاسخ خروجی را در حالت حلقه باز وحلقه بسته بدست آورید.

الف) حلقه باز: با کنترل جریان آرمیچر:



$$G(s) = \frac{Y(s)}{V_a(s)} = \frac{K_m}{1+T_m.S}$$

$$\begin{cases} K_m = \frac{\acute{K}}{R_a.B+K_b.\acute{K}} \\ T_m = \frac{R_a.J}{R_a.B+K_b.\acute{K}} \end{cases}$$

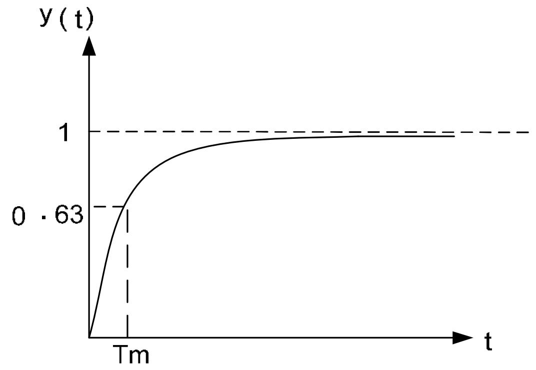
با فرض اینکه $r(t)$یا ورودی $v_a(t)$ پله واحد باشد:

$$V_a(s) = \frac{r \times K}{S}$$

$$Y(s) = \frac{K.r}{S} \cdot \frac{K_m}{1+T_m.S}$$

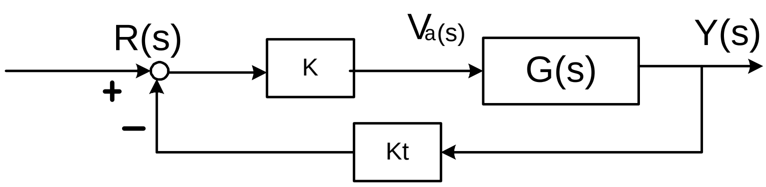
$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y(t) = K.K_m.r\left(1 - e^{-t/T_m}\right)$$

شکل پاسخ که منحنی تغییرات سرعت موتور برحسب زمان است بصورت زیر خواهد بود:



و در آن $Tm = \frac{R_a.J}{R_a.B+\acute{K}.K_b}$ ثابت زمانی موتور است. ملاحظه می شود که برای سریعتر کردن سیستم باید ثابت زمانی را کاهش داد ولی هیچ پارامتر قابل کنترلی در آن وجود ندارد.

ب) سیستم حلقه بسته:

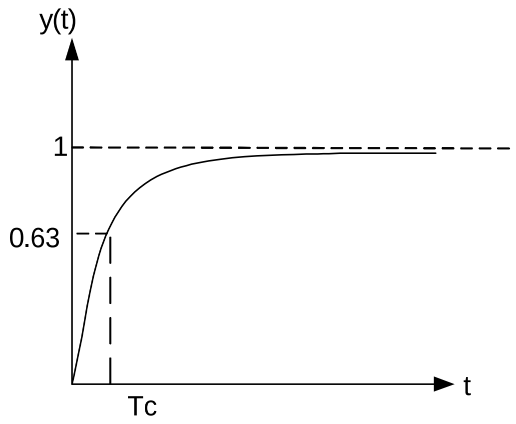


$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K.K_m}{1+T_m.S}}{1+\frac{K.K_m.K_t}{1+T_m.S}} = \frac{K.K_m}{1+K.K_m.K_t+T_m.S} = \frac{\frac{K.K_m}{1+K.K_m.K_t}}{1+\frac{T_m}{1+K.K_m.K_t}.S}$$

$$K_c = \frac{K.K_m}{1+K.K_m.K_t}$$

$$T_c = \frac{T_m}{1+K.K_m.K_t} \Rightarrow T_c < T_m$$

$$T(s) = \frac{R.K_c}{s.[1+T_c.S]} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1} \Rightarrow y(t) = K_c.R\left(1 - e^{-t/T_c}\right)$$



همانطور که در شکل دیده می شود ثابت زمانی موتور به مقدار T_c تغییر کرده است که می توان آنرا توسط مقادیر K_t یا K را تغییر داد. البته برای کاهش آن بهتر است که K را کاهش دهیم تا اثر کمتری بر بهره سیستم داشته باشد. زیرا با افزایش K_t علاوه بر کاهش ثابت زمانی، بهره سیستم نیز کاهش می یابد.

فصل پنجم

پاسخ زمانی سیستمهای کنترل

تحلیل سیستمهای کنترل در حوزه زمان

پاسخ زمانی یک سیستم دارای دو بخش است:

۱- پاسخ گذرا
۲- پاسخ مانا

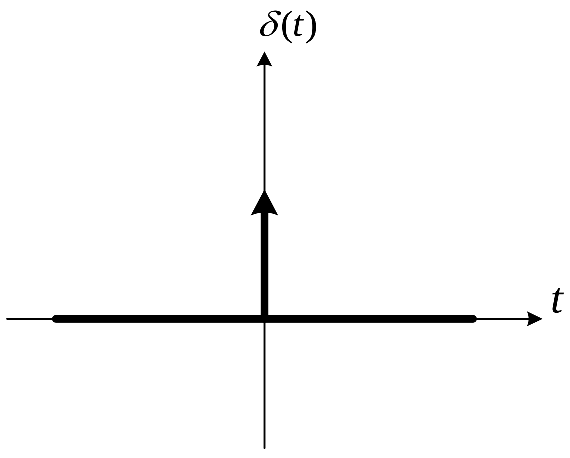
$$C(t) = C_t(t) + C_{ss}(t) \;\Rightarrow\; lim_{t\to\infty} C_t(t) = 0$$

در سیستم های واقعی به دلیل وجود لختی، جرم و اندکتانس خروجی نمیتواند تغییرات ناگهانی ورودی را آناً دنبال کند به همین دلیل حالتهای گذرا در سیستم ایجاد می شود. در مطاله یک سیستم کنترل بررسی پاسخ گذرا و پاسخ مانا هردو اهمیت دارند .

با مطاله پاسخ گذرا سرعت سیستم وحداکثر جهش خروجی و با مطاله پاسخ مانا خطای ماندگار مورد بررسی قرار میگیرد در مسائل مختلف معمولا مشخصات بر حسب دو پاسخ داده می شود و ما با طراحی کنترل کننده پاسخ را به شکلی تعیین می کنیم که موارد خواسته شده را تامین کند .

سیگنالهای آزمون ورودی برای پاسخ زمانی سیستم های کنترل در حوزه زمان:

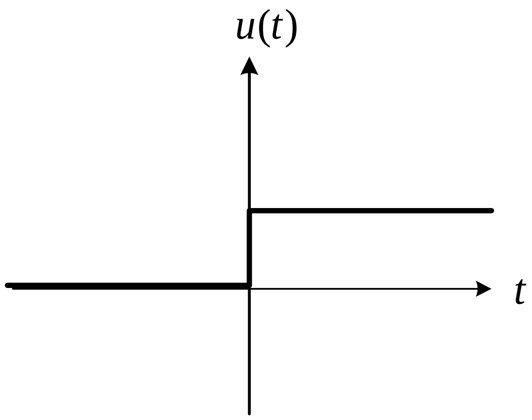
۱- ورودی ضربه:



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

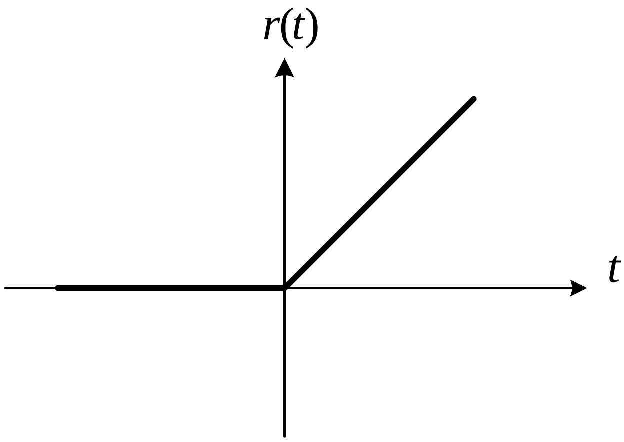
۲- ورودی پله واحد (وضعیت) :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



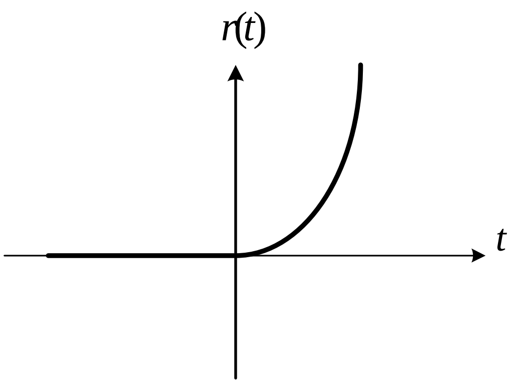
۳- ورودی شیب (سرعت):

$$r(t) = R.t.u(t)$$



۴- ورودی سهموی(شتاب):

$$r(t) = R.t^2.u(t)$$



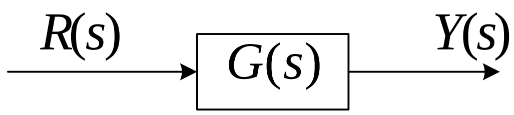
تحلیل پاسخ زمانی سیستمهای کنترل براساس موقعیت قطب ها:

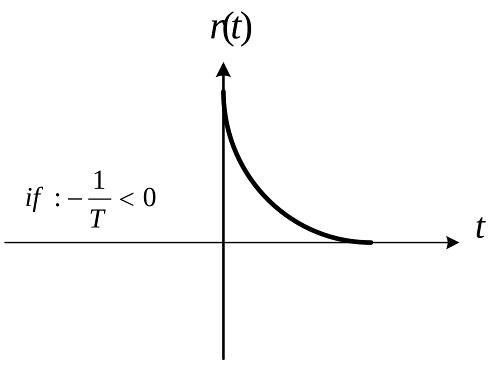
اگر تابع تبدیل یک سیستم را بصورت زیر در نظر بگیریم:

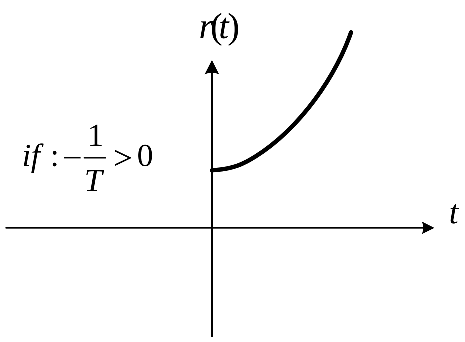
$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b(s)}{a(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+b_2s^{n-2}+\dots+b_n}{s^\lambda(a_0s^m+a_1s^{m-1}+a_2s^{m-2}+\dots+a_m)}$$

آنگاه این سیستم دارای n صفر، $m+\lambda$ قطب که m قطب غیر صفر و λ قطب واقع در صفر است. برای علی بودن این سیستم همواره باید $m+\lambda\geq n$ باشد. در این سیستم m مرتبه سیستم و λ نوع سیستم نامیده می شود. همچنین معادله $a(s)=0$ معدله مشخصه سیستم است که موقعیت قطبها را به ما می دهد.

پاسخ ضربه به یک سیستم مرتبه اول:







$$G(s)=\frac{1}{1+T.S}=\frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$r(t)=\delta(t)\Rightarrow R(s)=1$$

$$Y(s)=G(s)=\frac{1}{1+T.S}$$

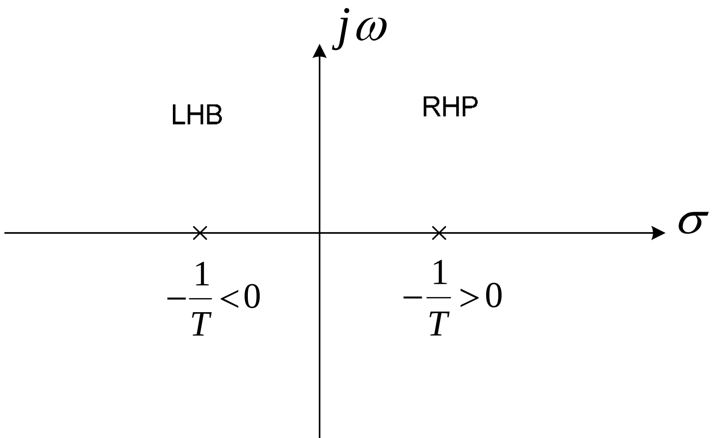
$$\mathcal{L}^{-1}\Rightarrow y(t)=\frac{1}{T}.e^{-t/T}.u(t)$$

ثابت زمانی: مدت زمانی که طول می کشد تا پاسخ به ۶۳٪ مقدار نهایی خود برسد را ثابت زمانی می گوییم.

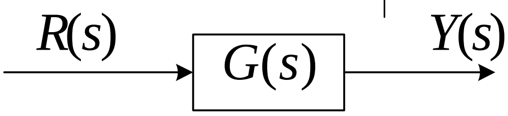
همانطور که در سیستم بالا دیده می شود ثابت زمانی T است که عکس فرکانس قطب می باشد.

نمایش قطبها در صفحه ی مختلط

قطبها فرکانسهای حقیقی یا مختلط هستند که در حالت کلی بصورت $s = \sigma \pm j\beta$ تعریف می شوند و می توان آنها را در یک صفحه به نام صفحه مختلط S رسم کرد. در شکل زیر قطب سیستم مرتبه یک بالا را در دو حالت نمایش داده شده است. ملاحظه می شود که زمانی سیستم به یک مقدار ثابت میل می کند که قطب آن در سمت چپ محور jw یا *(LHP)* باش



پاسخ پله به یک سیستم مرتبه اول:



یک سیستم مرتبه اول مانند شکل مقابل مفروض است

پاسخ پله این سیستم بصورت زیر محاسبه می شود:

$$G(s) = \frac{1}{1+T.S} = \frac{Y(s)}{R(s)}$$

$$r(t) = u(t) \Rightarrow R(s) = \frac{R}{s}$$

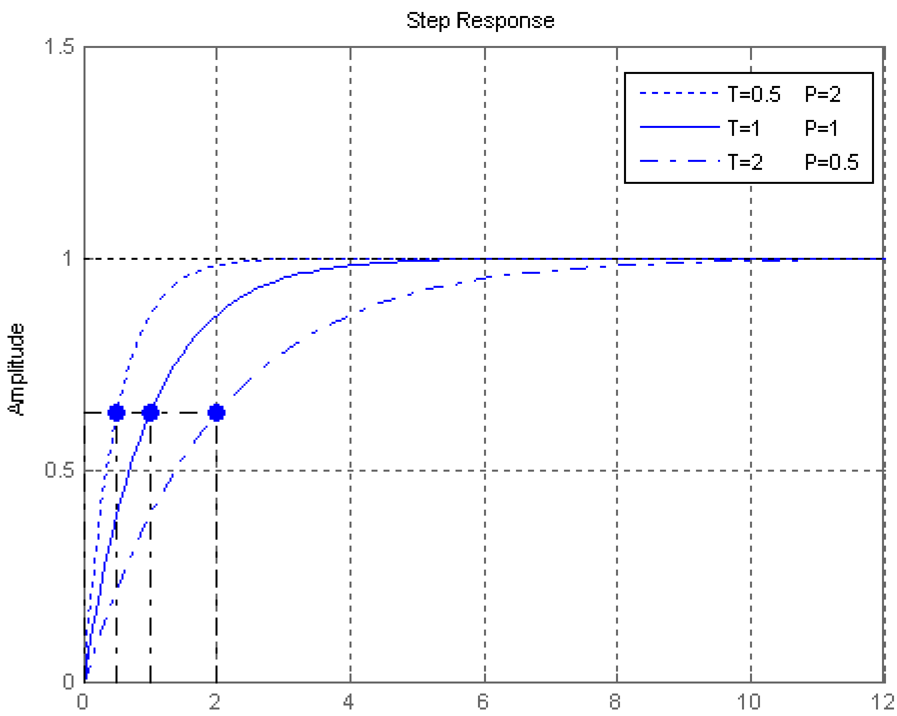
$$Y(s) = G(s) = \frac{R}{S(1+T.S)}$$

$$L^{-1} \Rightarrow y(t) = R.(1 - e^{-t/T}).u(t)$$

برای سیستم فوق دو ویژگی مهم وجود دارد که عبارتند از ثابت زمانی و مقدار حالت مانا. ثابت زمانی که عکس قطب است و برابر **T** می باشد و مقدار حالت مانا بصورت زیر بدست می آید:

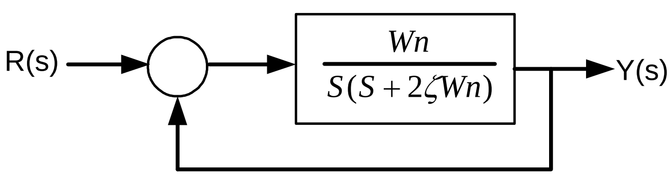
$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sy(s) = R$$

مثال۱-۵) در شکل زیر پاسخ زمانی سیستم مرتبه اول را با قطبهای مختلف مشاهده می کنیم. *(R=1)*



مشاهده می شود که هرچه قطب کوچکتر باشد ثابت زمانی آن بزرگتر است و سیستم کندتر عمل می کند و هرچه قطب بزرگتر باشد سیستم سریعتر است.

پاسخ سیستمهای مرتبه دوم به ورودی پله:



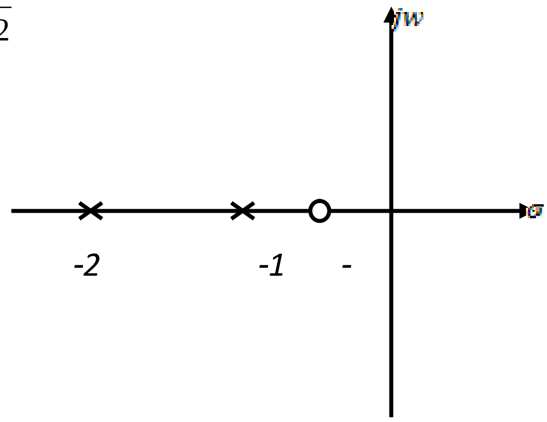
$G(s)=\frac{y(s)}{R(s)}=\frac{W_n^2}{s^2+2\zeta W_n+W_n^2}$

معادله مشخصه : $S^2+2\xi w_n S+w_n^2=0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S_1=-\xi w_n+jw_n\sqrt{1-\xi^2} \\ S_2=-\xi w_n-jw_n\sqrt{1-\xi^2} \end{cases}$

الف) اگر $|\zeta|>1$ باشد، دو ریشه حقیقی داریم :

$$G(s)=\frac{2S+1}{S^2+3S+2}=\frac{2(S+1/2)}{(S+1)(S+2)}=-\frac{1}{S+1}+\frac{3}{S+2}$$

قطبها $\begin{cases} s=-1 \\ s=-2 \end{cases}$　　　صفر $s=-0.5$



$R(S)=1$

$Y(s)=R(S)*G(S) \quad \Rightarrow \quad y(t)=-e^{-t}+3e^{-2t}$

ب) اگر $1>|\zeta|>0$ باشد، سیستم دارای دو ریشه مختلط خواهد بود:

$$S=-\sigma\pm jWd \longrightarrow \sigma=\zeta Wn \longrightarrow Wd=Wn\sqrt{1-\zeta^2}$$

پاسخ سیستم مرتبه دوم برای ورودی پله واحد با فرض $|\zeta|<1$:

$$y(s)=R(s).G(s)=\frac{w_n^2}{s(s^2+2\zeta w_n s+w_n^2)}=\frac{w_n^2}{s(s+\delta-jWd)(s+\delta+jWd)}$$

$$Y(s)=\frac{w_n^2}{s\big((s+\delta)+jWd\big)((s+\delta)-jWd)}=\frac{1}{s}-\frac{(s+\delta)}{(s+\delta)^2+w_d^2}-\frac{\delta}{(s+\delta)^2+w_d^2}$$

$$Y(t) = U(t) - e^{-\delta t}(\cos Wd.t + \frac{\delta}{Wd}\sin Wd.t)$$

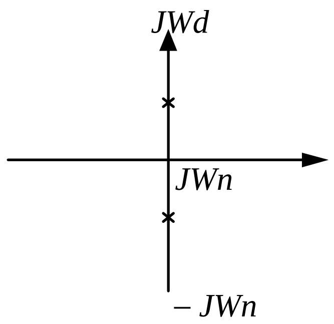
تمرین۱-۵) نشان دهید که پاسخ فوق را می توان به صورت زیر نوشت ؟

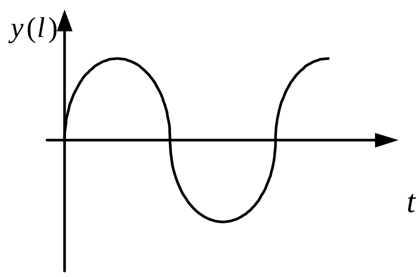
$$Y(t) = 1 - \frac{e^{-\delta t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(w_n\sqrt{1-\zeta^2}.t + \cos^{-1}\zeta)$$

چند تعریف :

ζ : نسبت میرایی σ فرکانس نامیرا Wn: فرکانس میرا Wd

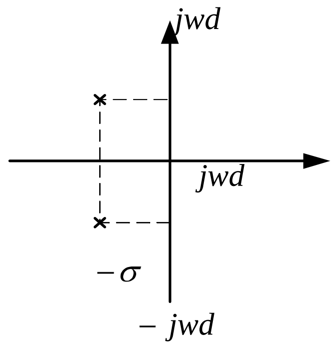
با فرض این که $\zeta = 0$: $S = \pm JWn$ $\quad S^2 + Wn^2 = 0 \longrightarrow$

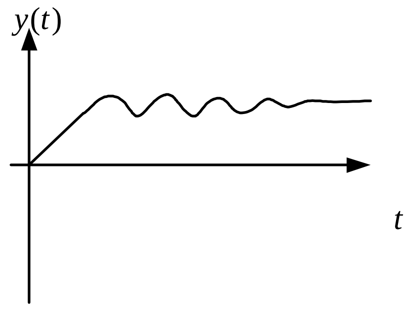




(پاسخ نوسانی خالص)

با فرض این که $0 < \zeta < 1$: $S_{1,2} = -\sigma + JWd$

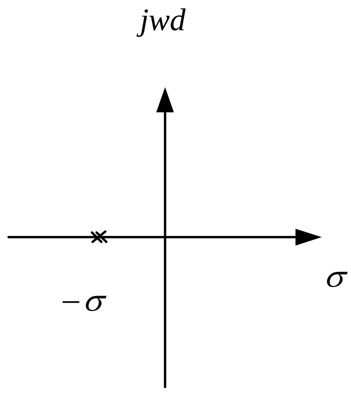


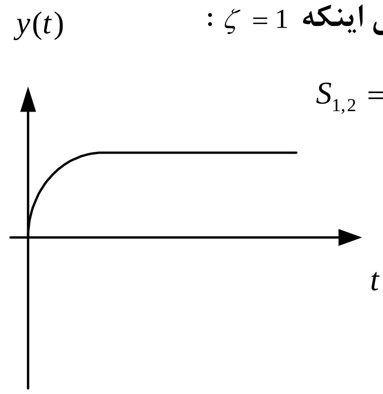


(پاسخ زیر میرایی یا نوسانی میرا)

با فرض اینکه $\zeta = 1$:

$S_{1,2} = -\sigma$

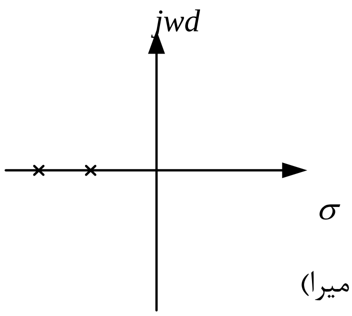




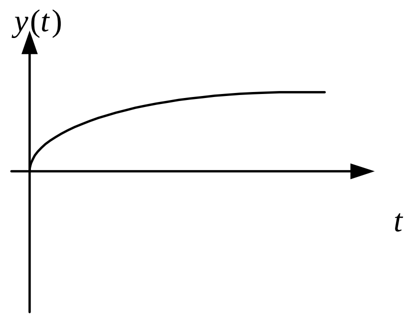
(پاسخ میرایی بحرانی)

با فرض اینکه $\zeta > 1$:

$$S_{1,2} = \begin{cases} -\sigma + wd \\ -\sigma - wd \end{cases}$$

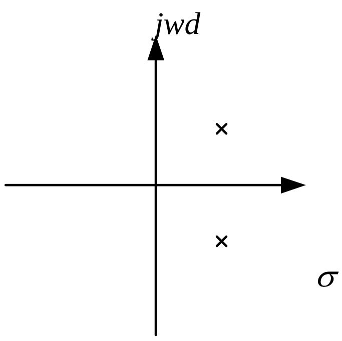


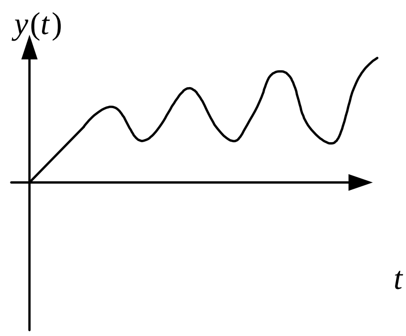
(پاسخ فوق میرا)



با فرض اینکه $-1 < \zeta < 0$:

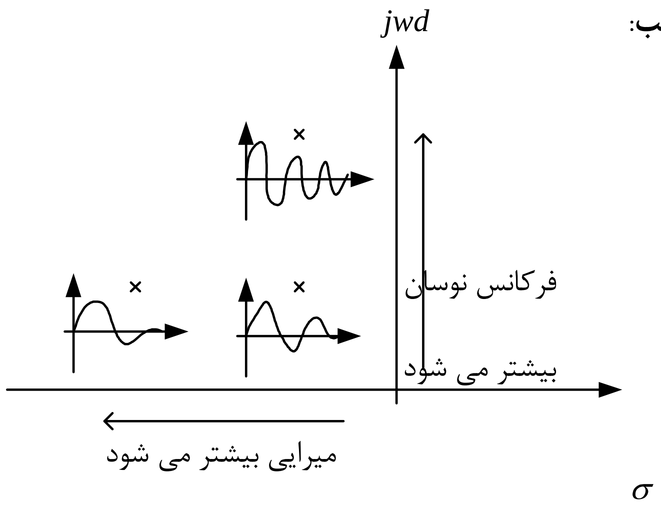
$S_{1,2} = \sigma \pm jwd$



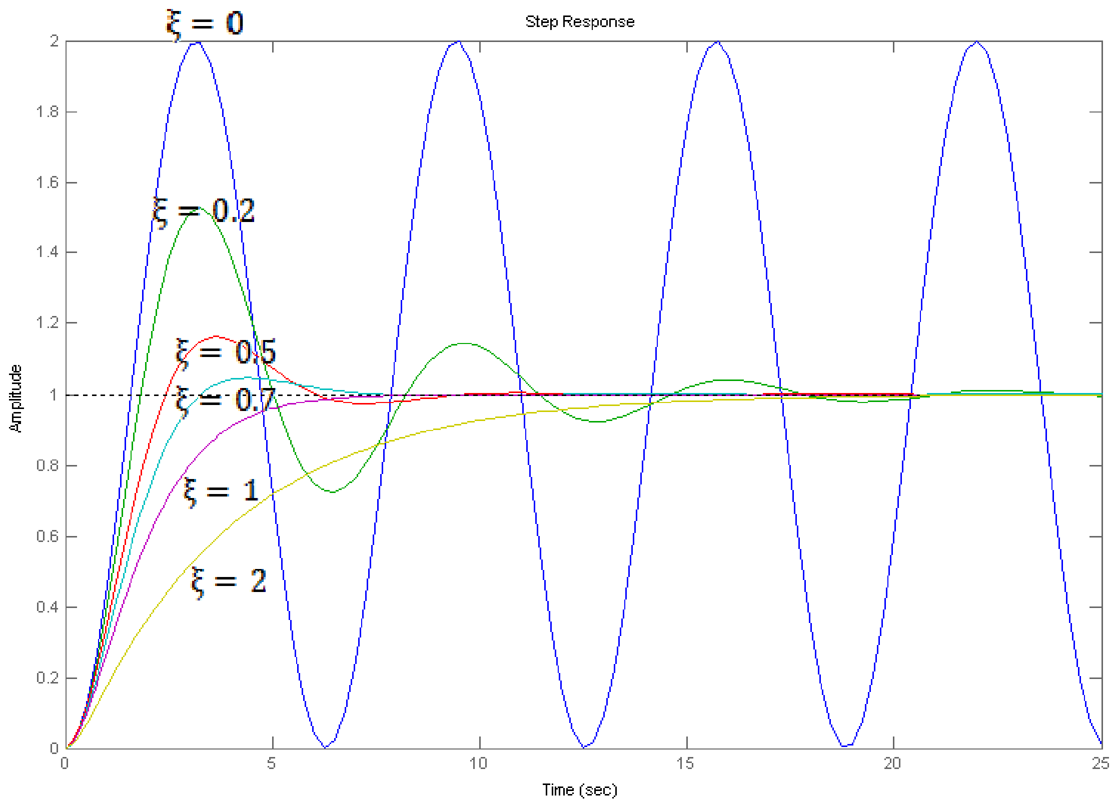


(پاسخ نا میرای منفی)

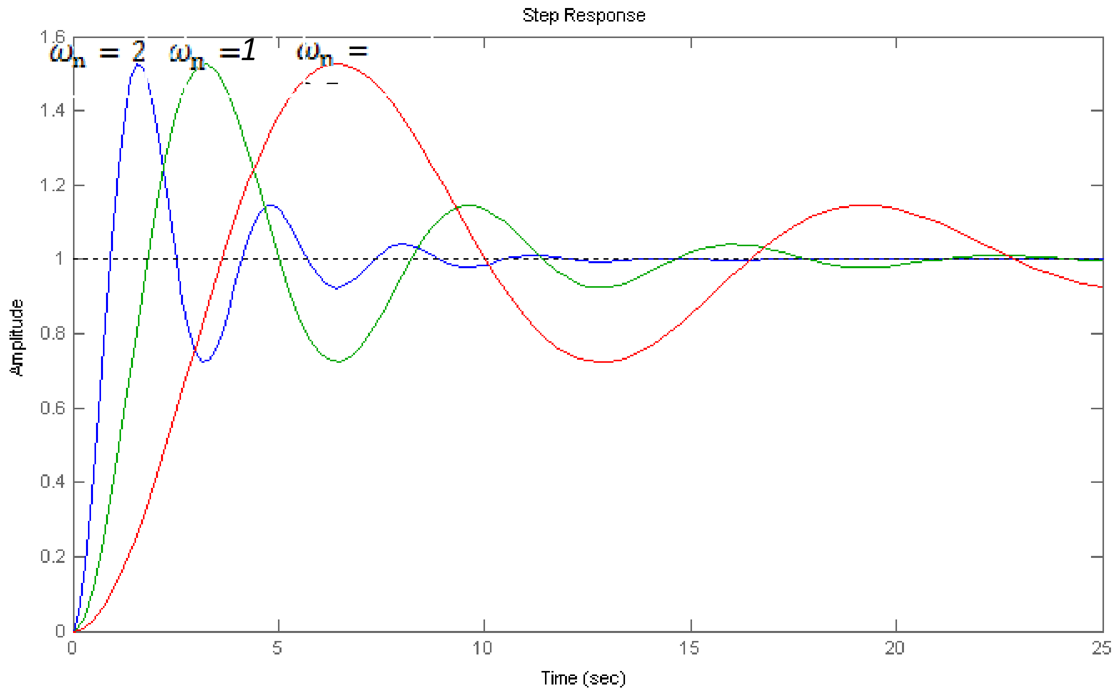
تشریح حرکت قطب:



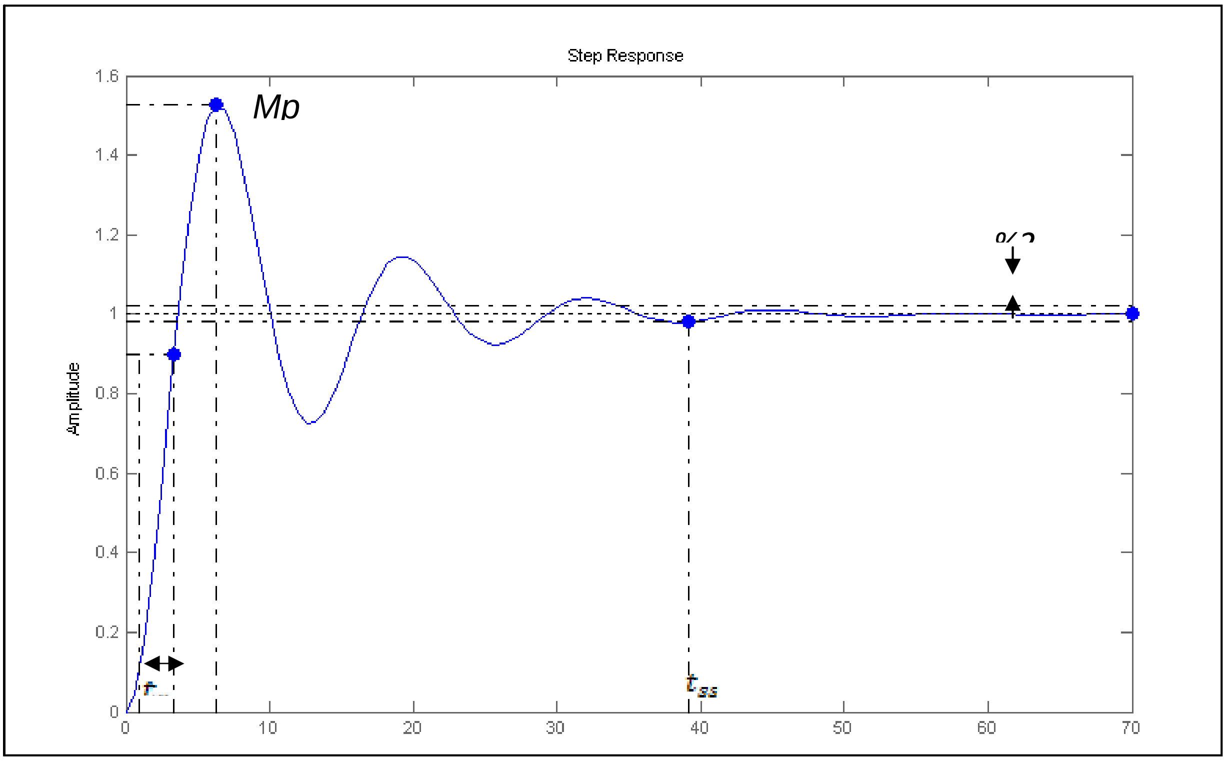
مثال ۲-۵) برای سیستم مرتبه ۲ استاندارد با $w_n = 1$ و ورودی پله پاسخ خروجی را با چند مقدار ξ رسم نمائید



مثال۳-۵) برای سیستم مرتبه ۲ استاندارد با $\xi = 0.5$ و ورودی پله پاسخ خروجی را با چند مقدار ω_n رسم



ویژگیهای پاسخ سیستم مرتبه دوم به ورودی پله واحد :



tp : زمان اوج (زمانی است که سیستم به اولین ماکزیمم خود می رسد) .

Mp : جهش ماکزیمم (فراجهش) تفاوت مقدار نخستین اوج جهش از مقدار واحد را ماکزیمم جهش می نامند .

$$\%Mp = \frac{y(tp) - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100$$

ts : زمان استقرار (مدت زمانی است که طول می کشد تا پاسخ به محدوده پاسخ نهایی برسد و در آن محدوده باقی بماند ، محدوده پاسخ نهایی باندی است که مقدار آن ۱٪ یا ۲٪ یا ۵٪ مقدار نهایی است) .

t_r : زمان خیز: مدت زمانی است تا طول می کشد تا خروجی از ***10%*** تا ***90%*** درصد مقدار نهائی خود برسد. (معمولا از ***0%*** تا ***100%*** درصد در نظر میگیریم).

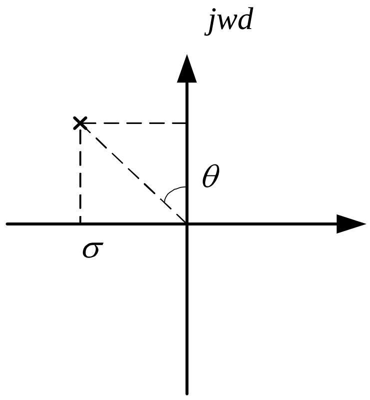
اثبات می شود که برای یک سیستم مرتبه دو با ورودی پله واحد ویژگیهای پاسخ از روابط زیر به دست می آید :

$$tr = \frac{\pi - \beta}{wd} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{wd}{\sigma} = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

$$tp = \frac{\pi}{wd} \qquad Mp = e^{-(\frac{\sigma}{wd})\pi} = e^{-(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})\pi}$$

$$ts\Big|_{1\%} = \frac{4.6}{\sigma} \qquad ts\Big|_{2\%} = \frac{4}{\sigma} \qquad ts\Big|_{5\%} = \frac{3}{\sigma}$$

jwd



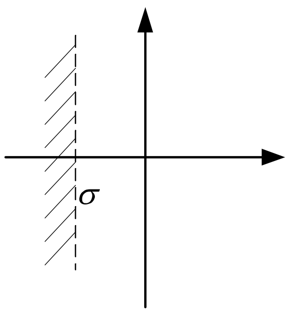
$$wd^2 + \sigma^2 = wn^2(1-\zeta^2) + wn^2\,\zeta^2 =$$

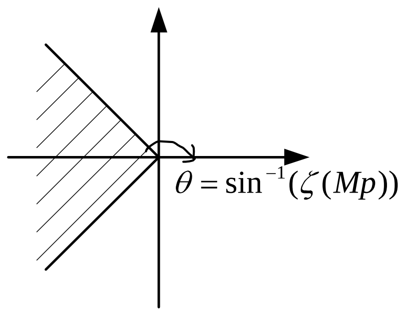
$$= wn^2 - \cancel{wn^2\zeta^2} + \cancel{wn^2\zeta^2} = wn^2$$

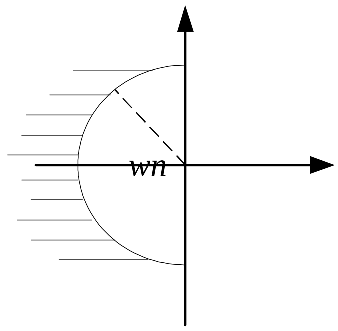
$$\sin\theta = \frac{\sigma}{wn} = \frac{jwn}{wn} = \zeta \longrightarrow \theta = \sin^{-1}\zeta$$

نتایجی از روابط بالا برای طراحی سیستم با قطبهای مورد نظر :

$$wn \ge \frac{\pi-\beta}{\sqrt{1-\zeta}\times tr} \qquad \zeta \ge \zeta(Mp) \qquad \sigma \ge \frac{4.6}{ts}$$

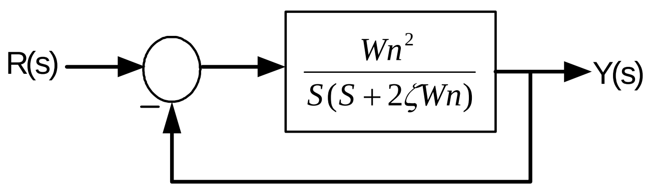






تمرین۲-۵) مکان هندسی موقعیت قطبها را به گونه ای تعیین کنید که $3s \ge ts$ و $10\% \ge Mp$ باشد؟

مثال۴-۵) در سیستم زیر مطلوب است محاسبه tr و tp و Mp و ts ؟



$$Wn = 5 \ {}^{rad}\!/_{S}$$

$$\zeta = 0.6$$

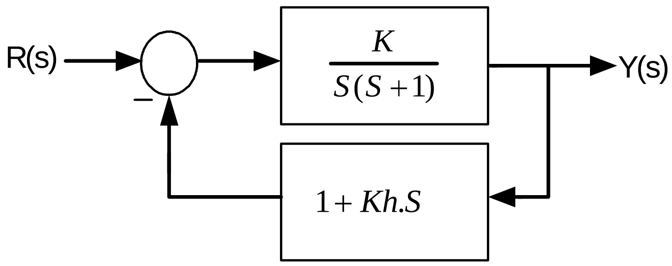
$$\sigma = \zeta Wn = 3 \qquad Wd = Wn\sqrt{1-\zeta^2} = 4$$

$$tr = \frac{\pi - \beta}{Wd} = \frac{3.14 - 0.93}{4} = 0.55^{(S)} \qquad \beta = \tan^{-1}\frac{Wd}{\sigma} = 0.93^{(rad)} \qquad tp = \frac{\pi}{Wd} = 0.785^{(S)}$$

$$Mp = e^{-(\frac{\sigma}{Wd})\pi} = 0.095 \qquad Mp\% = 9.5\% \qquad ts = \frac{4}{\sigma}\Big|_{2\%} = 1.33^{(S)} \qquad ts = \frac{3}{\sigma}\Big|_{5\%} = 1^{(S)}$$

مثال۵-۵) در سیستم مقادیر K و Kh را چنان تعیین کنید که بیشینه جهش برابر با ۰/۲ و زمان اوج ۱ ثانیه

شود سپس زمان استقرار را بیابید ؟



$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{S(S+1)}}{1 + \frac{K(1+Kh.S)}{S(S+1)}} =$$

$$= \frac{K}{s^2 + (1 + Kk_s)S + K} \longrightarrow \begin{cases} 2\zeta Wn = 1 + K.Kh \\ w_n^2 = k \end{cases}$$

$$Mp = 0.2 = e^{-(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}})\pi} \longrightarrow \zeta = 0.45$$

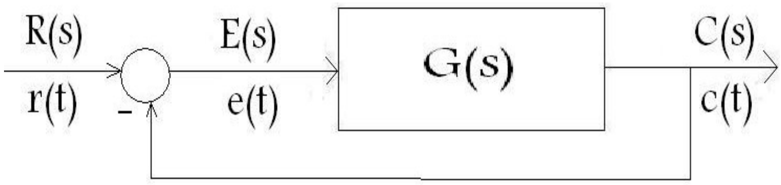
$$tp = \frac{\pi}{Wd} = 1 \longrightarrow Wd = 3.14 \longrightarrow Wn = \frac{3.14}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 3.53$$

$$w_n^2 = k = 12.6 \qquad 2\zeta w_n = 1 + KK_h \qquad K_h = \frac{2\zeta W_n - 1}{12.67} = 0.174$$

$$tr = \frac{\pi - \beta}{Wd} = \frac{3.14 - 1.10}{3.14} = 0.65^{(S)} \qquad \beta = \tan^{-1}(\frac{Wd}{\sigma}) = \tan^{-1}(1.95) = 1.10$$

$$ts = \frac{4}{\sigma}\Big|_{2\%} = 2.48^{(S)}$$

خطای حالت مانا در سیستم های کنترل خطی:



تعریف خطا بر اساس آرایش سیستم:

در صورتی که سیستم دارای فیدبک واحد باشد:

$$e(t)=r(t) - c(t) \Rightarrow E(s) = R(s) - C(s) \Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)}$$

و اگر سیستم دارای فیدبک غیر واحد است، خطا بصورت زیر محاسبه می شود:

$$e(t) = r(t) - b(t) \Longrightarrow E(s) = R(s) - B(s) = R(s) - C(s).H(s) \Longrightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s).H(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} s.E(s) = \lim_{s\to 0} s.\frac{R(s)}{1+G(s).H(s)}$$

نوع سیستم های کنترل خطی:

فرض میکنیم تابع تبدیل حلقه باز در یک سیستم کنترولی بصورت زیر باشد:

$$G(s).H(s)= \frac{K(1+T_1.s)(1+T_2.s)\ldots\ldots(1+T_m.s)}{s^j(1+T_a.s)(1+T_b.s)\ldots\ldots(1+T_h.s)}\, e^{-T_d.s}$$

که در آن همه T_i ها و K ضرایب ثابت هستند. در این سیستم j، که تعداد قطبهای موجود در صفر است ، نوع سیستم می باشد.

خطای حالت مانا به ورودی پله: $R(s) = R/s$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{s\,R/s}{1+G(s).H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{R}{1+G(s).H(s)} = \frac{R}{1+\lim_{s\to 0}G(s).H(s)}$$

$$\lim_{s\to 0} G(s).H(s) = Kp \Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{1+Kp} \quad \begin{cases} j = 0 \Rightarrow Kp = const \Rightarrow e_{ss} = \infty \\ j \ge 1 \Rightarrow Kp = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0 \end{cases}$$

خطای حالت مانا به ورودی شیب :

$$R(s) = R/s^2 \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{R}{s+s.G(s).H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{R}{s.G(s).H(s)}$$

$$\lim_{s\to 0} s.G(s).H(s) = Kv \Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{Kv} \quad \begin{cases} j = 0 \Rightarrow Kv = 0 \Rightarrow e_{ss} = \infty \\ j = 1 \Rightarrow Kv = const \Rightarrow e_{ss} = const \\ j \ge 3 \Rightarrow Kv = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0 \end{cases}$$

خطای حالت مانا به ورودی سهموی واحد :

$$R(s) = R/s^3 \Rightarrow e_{ss} = \lim_{s\to 0}\frac{R}{s^2+s^2.G(s).H(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{R}{s^2.G(s).H(s)}$$

$$\lim_{s\to 0} s^2.G(s).H(s) = Ka \Rightarrow e_{ss} = \frac{R}{Ka} \quad \begin{cases} j \le 1 \Rightarrow Ka = 0 \Rightarrow e_{ss} = \infty \\ j = 2 \Rightarrow Ka = const \Rightarrow e_{ss} = const \\ j \ge 3 \Rightarrow Ka = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0 \end{cases}$$

در اصل j تعداد قطبها در نقطه صفر و یا تعداد انتگرال گیرهایی است که در سیستم وجود دارد. لذا اگر در سیستمهای کنترلی از خطا انتگرال گرفته شود خطای حالت ماندگار کاهش می یابد. و این موضوع کاری است که یک کنترل کننده انتگرالی انجام میدهد.

خلاصه مطالب مربوط به خطا

j	Kp	Kv	Ka	خطای پله	خطای شیب	خطای سهمی
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
3	∞	∞	∞	0	0	0

چند نکته:

- سیگنال خطا را همواره با توجه به ارایش سیستم باید تعیین کرد.
- تابع تبدیل $sE(s)$ نباید هیچ ریشه ای در سمت راست محور jw داشته باشد.
- اگر چند ورودی همزمان به سیستم اعمال شود بر اساس قانون جمع آثار خطای حالت ماندگار برابر مجموع خطاهای هر ورودی است.

محک پایداری راث-هرویتز:

با استفاده از این روش میتوان از تعداد قطبهای سمت راست محور jw برای یک سیستم آگاهی یافت. و به کمک آن پایداری را بررسی کرد:

مراحل این محک:

۱- ابتدا معادله مشخصه سیستم را بر حسب توان S مرتب میکنیم:

$$a_0S^n + a_1S^{n-1} + a_2S^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

۲- شرط لازم برای پایدار بودن سیستم این است که تمامی ضرایب موجود و هم علامت باشند.

۳- اگر شرط فوق برقرار بود آرایه ی زیر را تشکیل میدهیم:

$$
\begin{array}{llll}
s^{n} & a_0 & a_2 & a_4 \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdots & & & \\
\cdots & & & \\
s^{1} & f_1 & f_2 & \\
s^{0} & a_n & &
\end{array}
$$

که در آن عناصر به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$b1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_2-a_0a_3}{a_1} \qquad b2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_4-a_0a_5}{a_1}$$

$$b_3 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1a_6-a_0a_7}{a_1}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_3-a_1b_2}{b_1}$$

$$c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} = \frac{b_1a_5-a_1b_3}{b_1}$$

۴- بنابر محک راث تعداد قطبهایی که در سمت راست محور jW وجود دارد برابر است با تعداد تغییر علامتهایی که در ستون اول آرایه فوق به وجود می آید. به عبارت دیگر شرط لازم و کافی برای پایداری این است که تمام ضرایب ستون اول آرایه ی فوق هم علامت باشند

مثال۶-۵) پایداری سیستم زیر را با استفاده از محک راث بررسی کنید

$$S^4 + 2S^3 + 3S^2 + 4S + 5 = 0$$

$$
\begin{array}{llllll}
+ & s^4: & 1 & 3 & 5 \\
+ & S^3: & 2 & 4 & 0
\end{array}
$$

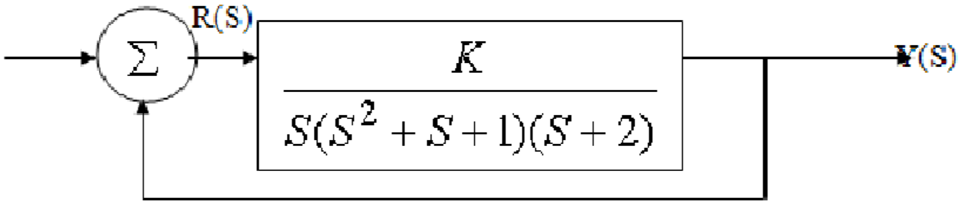
$+ \quad S^2: \quad 1 \quad 5 \quad 0$

$- \quad S^1: \quad -6 \quad 0$

$+ \quad S^0: \quad 5$

چون۲بار تغییر علامت داریم پس ۲ قطب در سمت راست محور jw وجوددارد، پس سیستم ناپایدار است.

تمرین۳-۵) در سیستم یک محدوده ای برای k ودر سیستم ۲محدوده ای برای kوk_i بیابید به گونه ای که سیستم ها پایدار شوند.



$$\frac{K}{(S^3+S^2+S)(S+2)} = \frac{K}{S^4+3S^3+3S^2+2S}$$ تابع تبدیل می

$$\frac{K}{S^4+3S^3+3S^2+2S+K} = G_{(s)}$$

شرط پایداری سیستم این است که هیچ قطبی سمت راست محور jw نباشد. بنابر این بر طبق قانون محک راث ستون سمت اول باید مثبت باشند پس:

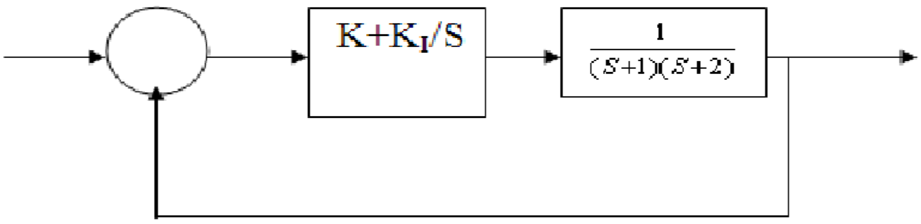
S^4: 1 3 K

S^3: 3 2 0

S^2: $B_1=7/3$ $B_2=K$

S: $\frac{14/3-3k}{7}$ $s^0: k$

$K < 14.9 \longrightarrow 0 < k < 14/9$



$$\Rightarrow \quad \frac{KS+K_I}{S^3+3S^2+2S} \qquad G=\frac{KS+K_I}{S^3+3S^2+S(2+K)+K_I}$$

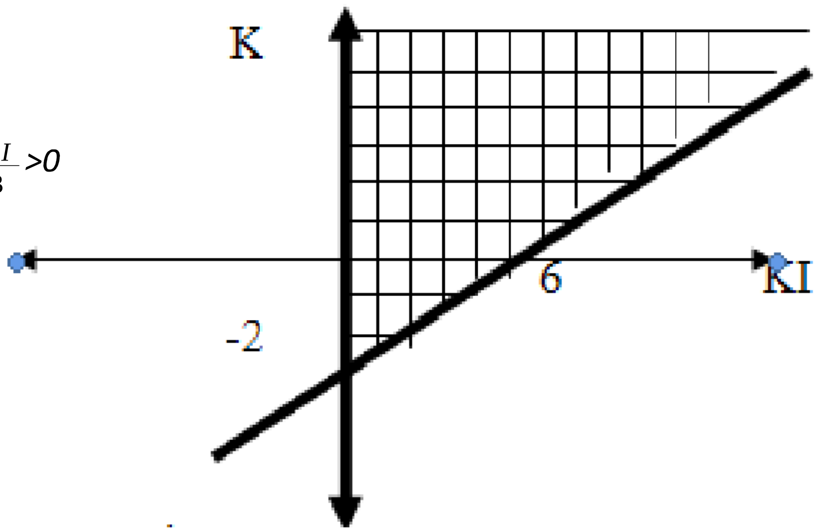
S^3:   1   (2+K)

S^2:   3 K_I

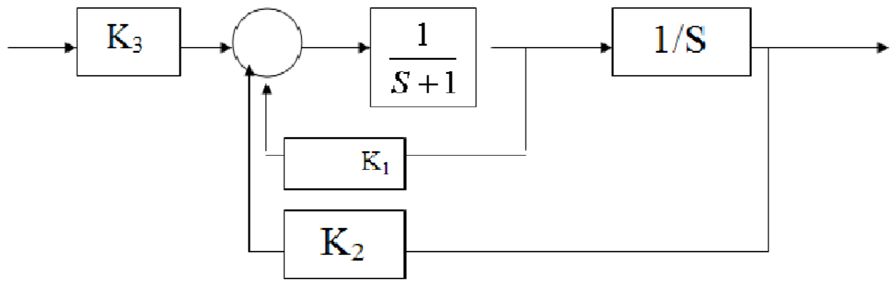
S: $b=\frac{6+3k-k_i}{3}$ 0

S^0: K_I

$$\begin{cases} K_I>0 \\ 2+K-\frac{K_I}{3}>0 \end{cases}$$



تمرین ۴-۵) در سیستم زیر مقادیر *K1* و *K2* و *K3* را به گونه ای بیابید که خطای حالت ماندگار به ورودی پله صفر شود؟



حالت های خاص در محک راث هرویتز:

حالت خاص ۱:

اگر ستون اول در یک سطر از آرایه صفر شود، در این حالت به جای صفر یک عدد مثبت خیلی کوچک (مثل ε) قرار می دهیم و با آن آرایه را تکمیل می کنیم. شرط پایداری برای این سیستم همچنان این است که همه ی اعضای ستون اول هم علامت باشند.

مثال۷-۵) محک پایداری را برای سیستم زیر زیر بررسی کنید

$$S^4 + S^3 + 2S^2 + 2S + 3 = 0$$

+	S^4	1	2	3
+	S^3	1	2	0
+	S^2	$B_1=0$	$B_2=3$	0

به جای صفر ε میگذاریم:

+	S^2	$B_1=\varepsilon$	$B_2=3$	0
-	S^1	$C_1=\dfrac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}$	0	0
+	S^0	3	0	0

حالت خاص ۲:

اگر همه ضرایب در یک سطر صفر شوند، آنگاه یک یا چند احتمال زیر برای ریشه ها وجود دارد:

- سیستم دارای دو ریشه ی حقیقی، مساوی و مختلف العلامه است.
- سیستم دارای یک یا چند جفت ریشه موهومی خالص است.
- سیستم دارای چند جفت ریشه ی مزدوج و مختلط است که نسبت به مبدا مختصات تقارن دارد.

در این حالت یک معادله به نام معادله ی کمکی تشکیل می دهیم. ضرائب این معادله از سطر قبل از سطر صفر تعیین می شود. از معادله ی کمکی مشتق گرفته و ضرائب آن را به جای سطر صفر قرار می دهیم و آرایه را با آن تکمیل می کنیم.

مثال۸-۵) محک پایداری را برای سیستم زیر پیدا کنید؟ $S^5 + 4S^4 + 8S^3 + 8S^2 + 7S + 4 = 0$

جواب:

$$
\begin{array}{cccc}
S^5 & 1 & 8 & 7 \\
S^4 & 4 & 8 & 4 \\
S^3 & 6 & 6 & 0 \\
S^2 & 4 & 4 & 0 \\
S & 0 & 0 &
\end{array}
$$

در اینجا است که طبق رابطه گفته شده عمل میکنیم :

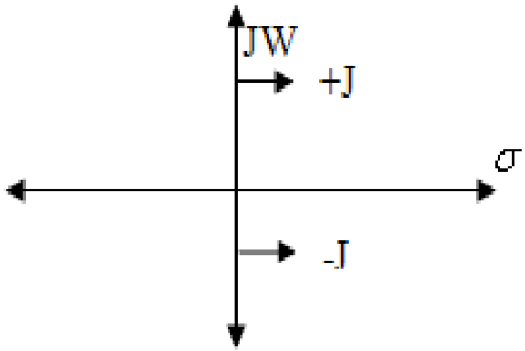
$$\longrightarrow \quad p_a = 4s^2 + 4$$

$$\frac{dp}{dt} = 8s + 0$$

$$
\begin{array}{ccc}
s^1 & 8 & 0 \\
s & 4 &
\end{array}
$$

ریشه های این معادله بصورت زیر بدست می آید:

$$4s^2 + 4 = 0 \longrightarrow 4(s^2 + 1) = 0 \longrightarrow s = \pm j$$



مثال۹-۵) محک پایداری را در سیستم زیر بررسی کنید؟

$$S^5 + 2S^4 + 240S^3 + 48S^2 + 25S + 50 = 0$$

$$\begin{array}{llll} S^5 & 1 & 240 & 25 \\ S^4 & 2 & 48 & 50 \\ S^3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

همان که دیده می شود سطر آخر صفر است و

در اینجاست که طبق رابطه عمل می کنیم:

$$P_{(A)} = 2S^4 + 48S^2 - 50$$

$$\frac{dP}{dt} = 8s^3 + 96s$$

حال با جای گذاری در رابطه داریم:

$$\begin{array}{llll} s^3 & 8 & 96 & 0 \\ s^2 & 24 & -50 & 0 \\ s^1 & 112.7 & 0 & 0 \\ s^0 & -50 & 0 & 0 \end{array}$$

برای اطلاعات بیشتر از قطب ها اینگونه ریشه ها را حساب می کنیم:

$p_{a-2s^4+48s^2-50}$

با در نظر گرفتن یک تغییر متغیر مانند $x = S^2$ داریم:

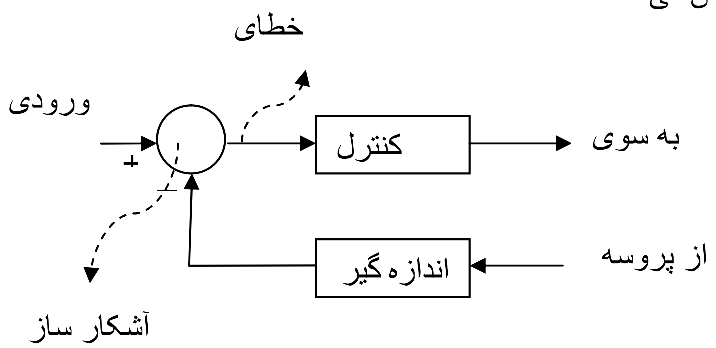
$$p_a = 2x^2$$

فصل ششم

کنترل کننده ها

کنترل کننده ابزاری است که با توجه به خطای موجود (اختلاف رفتار پروسه با رفتار مطلوب) و با در نظر گرفتن قوانین کنترل که طراح به آن یاد داده است . دستوری را جهت اصلاح و هدایت پروسه به آن اعمال می کند .

شکل زیر ساختار استفاده از یک کنترل کننده را نشان می دهد .



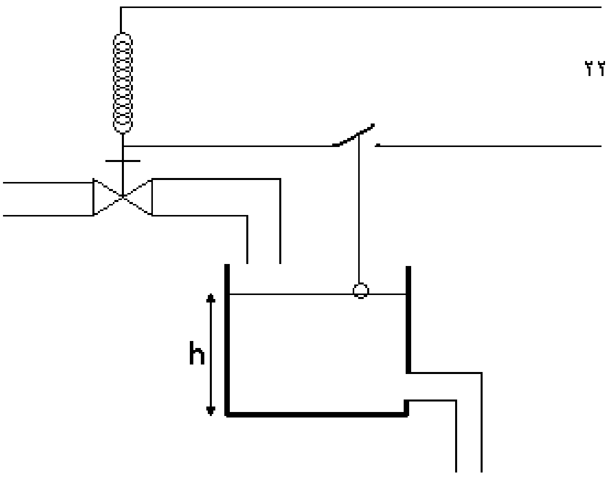
کنترل کننده ها از نظر مورد استفاده به سه دسته الکتریکی ، پنوماتیکی و هیدرولیکی تقسیم می شوند و از نظر قانون کنترل دارای انواع زیر هستند .

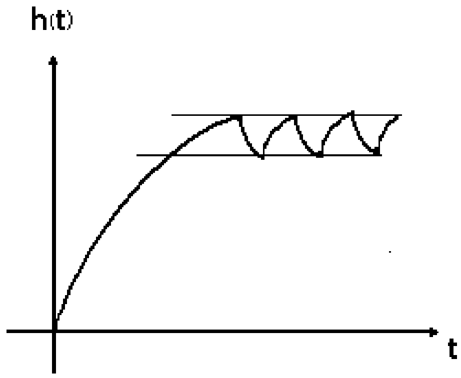
۱) دو وضعیتی (*ON – OFF*)
۲)تناسبی (*Proportional*)
۳)انتگرالی (*integral*)
۴)مشتقی (*derivative*)
۵)تناسبی مشتقی *PD*

۶)تناسبی انتگرالی *PI*

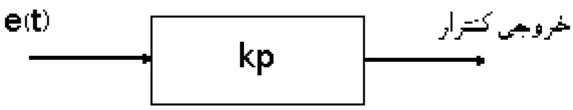
۷)تناسبی انتگرالی مشتقی *PID*

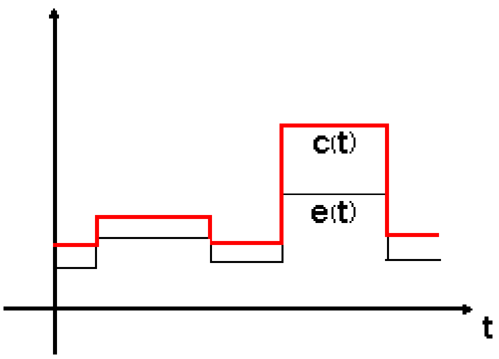
کنترل کننده دو وضعیتی :

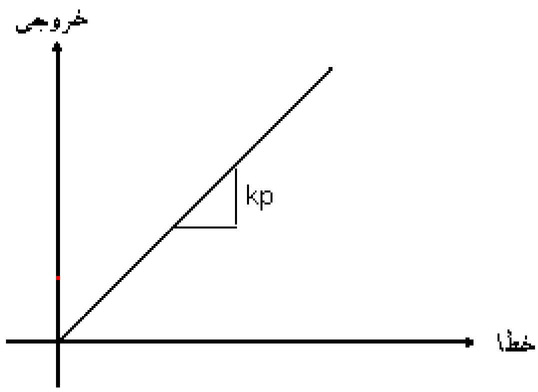




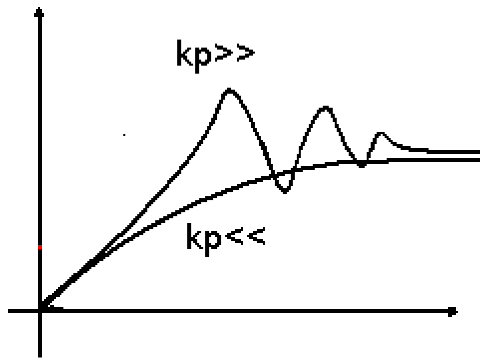
کنترل کننده تناسبی :



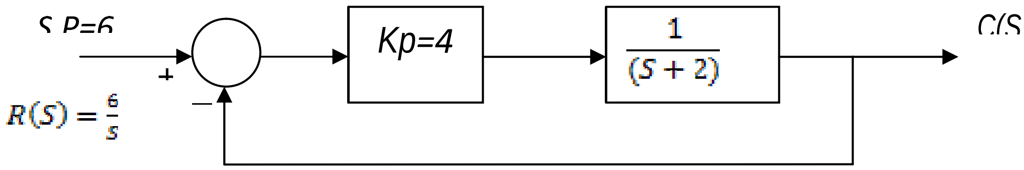




کنترل کننده تناسبی به تنهایی قادر به حذف خطا در حالت ماندگار نیست شکل زیر وضعیت خروجی را برای یک سیستم نمونه در حالت *kp<<* و *kp>>* نشان می دهد .



مثال ۱-۶) در سیستم زیر خطای پروسه را بدست آورید ؟

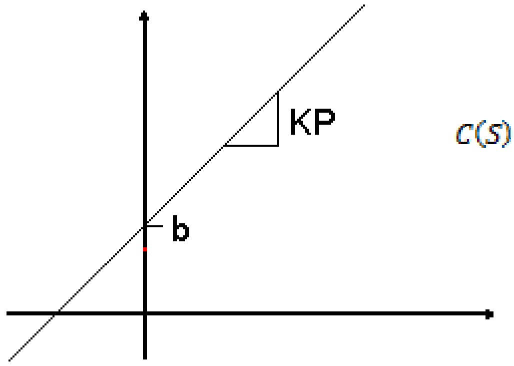


$$E(S) = R(S) - C(S) \qquad , \qquad C(S) = E(S) \times 4 \times \frac{1}{S+2}$$

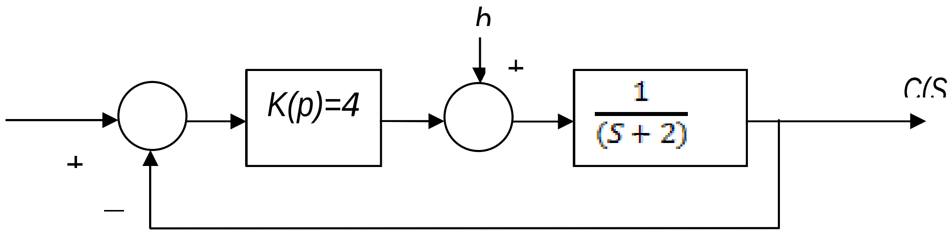
$$E(S) = R(S) - \frac{4}{S+2} \times E(S) \qquad \Rightarrow \qquad E(S) = \frac{R(S)\times(S+2)}{(S+6)}$$

$$E(S) = \frac{6(S+2)}{S(S+6)} \qquad lim_{S\to\infty}\, e(t) = lim_{S\to 0}\, SE(S) = 2$$

کنترل کننده تناسبی بایاس دار :



$$C(S) = E \times KP + b$$



خطای حالت ماندگار صفر می شود ؟ $b=12$مثال۲-۶) نشان دهید که در شکل بالا با قرار دادن

$$E(s) = R(s) - C(s) \text{ و } C(s) = \frac{[(E(s)*4) + b(s)]}{s+2} \longrightarrow E(s) = R(s) - \big(4.E(s) + b(s)\big)\frac{1}{s+2}$$

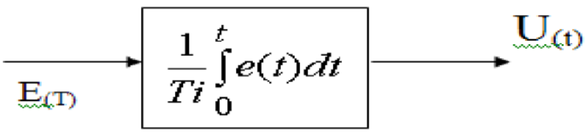
$$\Rightarrow E(s).\left(1 + \frac{4}{s+2}\right) = R(s) - \frac{b(s)}{s+2} \Rightarrow E(s) = \frac{R(s) - \frac{b(s)}{s+2}}{\frac{s+6}{s+2}} = \frac{R(s)(s+2) - b(s)}{s+6}$$

$$\begin{cases} R(s) = \\ b(s) = \frac{1}{} \end{cases}$$

تمرین : نشان دهید که با عوض کردن مقدار *S.P=8* در کنترل کننده تناسبی بایاس دار با مقادیر مثال قبل خطا دوباره ظاهر می شود و سپس مقداری برای *b* بیابید که خطا را از بین ببرد .

کنترل کننده انتگرالی:

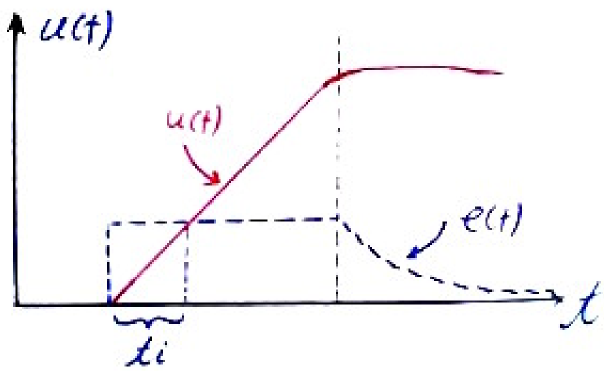
در این کنترل کننده خروجی کنترل کننده با مجموع خطا متناسب است. در این روش خروجی کنترل کننده آنقدر افزایش پیدا می کند تا سیگنال خطا صفر شود



$$u(t) = \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)dt$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dU_{(t)}}{dt} = \frac{1}{T_i} * e(t)$$

طبق رابطه هرگاه خطا صفرشود تغییرات خروجی صفر میشود وثابت می ماند.

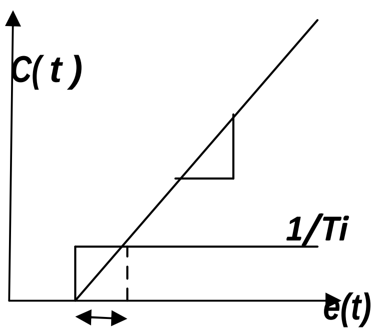


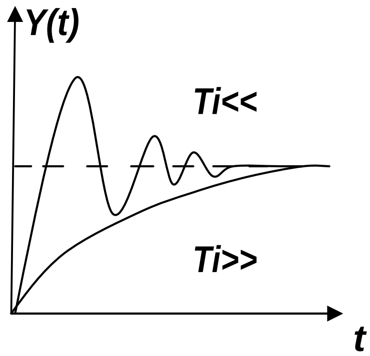
وقتی خطا صفر میشود خروجی ثابت

می ماند

در پروسه ای که سرعت برای ما مهم نیست فقط این مهم است که در نهایت، خروجی ثابت داشته باشیم به ازای خطای صفر ما از این کنترل کننده استفاده می کنیم.

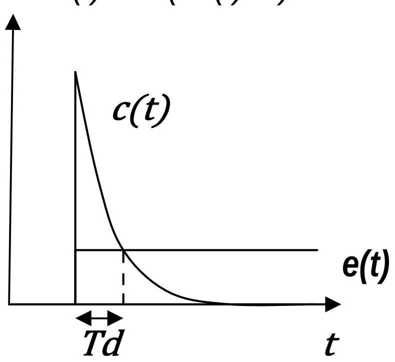
t_i زمان انتگرال گیری است و برابر با زمانی است که خروجی کنترل کننده انتگرالی با خطا برابر می شود. هر چه t_i کوچک باشد مقداری که در هر بار انتگرالگیری به خروجی کنترل کننده اضافه می شود بیشتر خواهد بود و هرچه t_i بزرگتر باشد برعکس می شود.(مثل این است که بگوییم بهره بالا می رود).

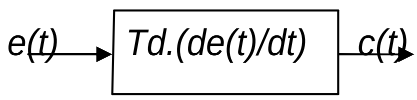




کنترل کننده ی مشتقی:

$$c(t)=Td.(de(t)/dt) \quad \Rightarrow \quad C(s)/E(s)=Td.s$$





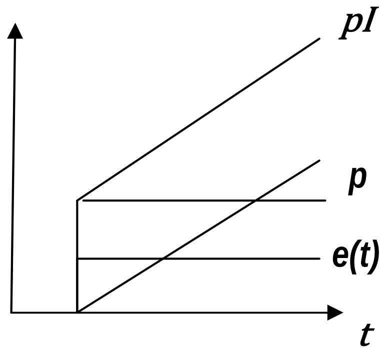
در کنترل کننده مشتقگیر سیگنال کنترلی مشتق خطا است. با توجه به اینکه آغاز هر خطائی در سیستم با تغییرات خطا همراه است لذا به محض ایجاد تغییر در خطا کنترلر مشتقگیر از خود عکس العمل نشان داده و جلوی ایحاد خطا را می گیرد. بهمین دلیل معمولا گفته می شود که کنترلر مشتقگیر توانائی پیش بینی خطا را دارد.

کنترل کننده ی PI:

e(t) → [kp(1+1/Ti.s)] → c(t)

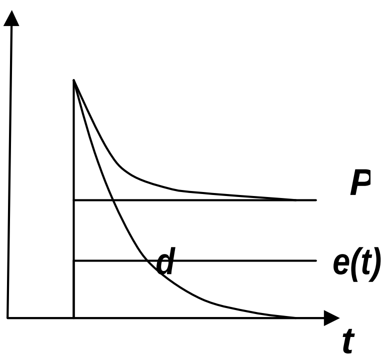
$c(t)=kp.e(t)+kp/Ti\int_0^t e(t)dt \Rightarrow C(s)/E(s)=kp(1+1/Ti.s) \Rightarrow$

$\Rightarrow C(s)/E(s)=kp.(Ti.s+1)/Ti.s$



کنترل کننده ی PD:

e(t) → [kp.(1+Td.s)] → c(t) $c(t)=kp.e(t)+kp.Td.(de(t)/dt) \Rightarrow c(s)/e(s)=kp.(1+Td.s)$



کنترل کننده ی PID:

$$e(t) \longrightarrow \boxed{Kp.(1+Td.s+1/Tis)} \longrightarrow c(t)$$

$$c(t)=kp.e(t)+kp.Td.de(t)/dt+kp/Ti\int_0^t e(t)dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C(s)/E(s)=kp.(1+Td.s+1/Ti.s)$$